Section 3 : ベクトル場

内容 : ベクトル場

ベクトル場のブラケット積, $C^\infty(M)$ 加群構造.

切断としてのベクトル場

ベクトル場の座標表示

ベクトル場の延長

Section 3.1 : ベクトル場の定義，各種構造

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd

記号 : $C^\infty(M) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid C^\infty 級 \}$

$\mathrm{End}(C^\infty(M)) := \{ X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) \mid 線型写像 \}$

線型作用素

作用素の和とスカラー倍によりベクトル空間となる．

Def 3.1.1 : $X \in \mathrm{End}(C^\infty(M))$ が

M上の C^∞級ベクトル場 （"C^∞級"は今後略す）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ （場のライプニッツ則）

$\forall f, h \in C^\infty(M)$,

~~f(p), f(x)~~

$$X(f \cdot h) = (Xf) \cdot h + f \cdot (Xh) \quad \text{in } C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$の積、

Def 3.1.2 : $\mathfrak{X}(M) := \{ X \in \mathrm{End}(C^\infty(M)) \mid$ ベクトル場 on $M \}$

Prop 3.1.3 : $\mathfrak{X}(M)$ は $\mathrm{End}(C^\infty(M))$ の部分ベクトル空間.

これから $\mathfrak{X}(M)$ に

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lie 代数} \\ C^\infty(M) \text{ 加群} \end{array} \right.$$

の構造をそれぞれ定めます.

◎ Lie代数の構造 on $\mathfrak{X}(M)$

Def 3.1.4 : 各 $X, Y \in \mathrm{End}(C^\infty(M))$ について、

$$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X \in \mathrm{End}(C^\infty(M))$$

X, Yのブラケット積

とおく.

i.e. 各 $f \in C^\infty(M)$ について、

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf) \in C^\infty(M)$$

Prop 3.1.5 : ブラケット積 $[\ ,\ ]$ は $\mathrm{End}(C^\infty(M))$ に Lie代数構造を定める.

Def 3.1.6 (Lie 代数)

$\mathfrak{g}$: ベクトル空間 / $\mathbb{R}$

結合性, 可換性, 単位の存在 はいずれも仮定しない

$[\ ,\ ]$: $\mathbb{R}$ 代数構造 on $\mathfrak{g}$

積

$(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ が Lie 代数

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (Jacobi 律)

$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$$

(← ライプニッツ則の一種)

Theorem 3.1.7 : $\mathfrak{X}(M) \subset \mathrm{End}(C^\infty M)$ はブラケット積で閉じる。

特に $\mathrm{End}(C^\infty(M))$ の部分 Lie 代数となる。

Remark : $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ について

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X \in \mathfrak{X}(M)$$

$\mathfrak{X}(M)$ の元でないので注意

@ $C^\infty(M)$ 加群の構造 on $\mathfrak{X}(M)$

Def. 3.1.8

各 $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathrm{End}(C^\infty(M))$ について

$$\begin{aligned} fX : C^\infty(M) &\to C^\infty(M) \\ h &\mapsto \underbrace{f}_{} \cdot \underbrace{(Xh)}_{C^\infty(M)\text{の元}} \end{aligned}$$

とおく.

Prop 3.1.9 :

写像 $C^\infty(M) \times \mathrm{End}(C^\infty(M)) \to \mathrm{End}(C^\infty(M))$

$$(f, X) \longmapsto fX$$

は well-defined かつ $\mathrm{End}(C^\infty(M))$ 上の $C^\infty(M)$ 加群の構造を定める.

Def 3.1.10 (R加群)

R を 結合的, 単位的, 可換 $\mathbb{R}$-代数 とする.

(ex : $C^\infty(M)$)

V を ベクトル空間 とする.

写像 : $R \times V \to V$, $(a, v) \mapsto av$ が定まっていて,

以下の条件 (1), (2), (3) を満たすとき,

V を R加群 という.

条件 (1) $R \times V \to V$, $(a, v) \mapsto av$ は 双線型.

(2) ${}^\forall a_1, a_2 \in R$, ${}^\forall v \in V$, $(a_1 \cdot a_2)v = a_1(a_2 v)$

(3) $1_R\, v = v$ $\quad ({}^\forall v \in V)$ ただし 1_R は Rの単位.

Theorem 3.1.11

$\mathfrak{X}(M)$ は $\mathrm{End}(C^\infty(M))$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群

i.e. $\forall f \in C^\infty(M)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $fX \in \mathfrak{X}(M)$

(Hint: 証明は簡単)

Section 3.2 : 切断としてのベクトル場, ベクトル場の座標表示

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd.

記号 : 各 $p \in M$ について

$$T_pM := \{ v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid \text{接ベクトル at } p \}$$

← 接空間

$$\mathfrak{X}(M) := \{ X \in \mathrm{End}(C^\infty(M)) \mid \text{ベクトル場 on } M \}$$

Def 3.2.1 : $TM := \{(p, v) \mid p \in M,\ v \in T_pM\}$

$\left(= \coprod_{p \in M} T_pM \right)$

を M の接束 (tangent bundle) と呼ぶ

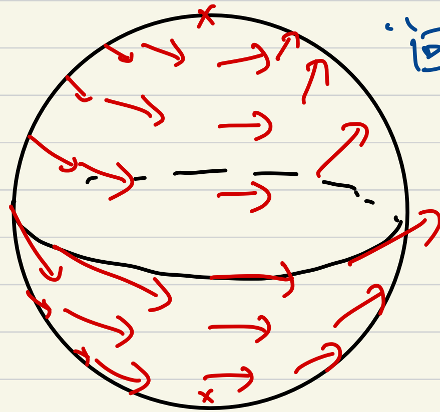
Remark : この講義では TM は単なる集合として扱うが、

実は TM は自然な意味で $2n$ - mfd とみなすことができ、"M 上のベクトル束" になっている

Def 3.2.2: 写像 $s: M \to TM$ が TM の切断 (section)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in M$, $\exists!\, v_p^s \in T_pM$ s.t. $s(p) = (p, v_p^s)$

M の各点にそれぞれ接ベクトルが定まっている.



"回転"を表す TS^2 の section

$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$

Def 3.2.3 : $\mathrm{Sect}(TM) := \{ s : M \to TM \mid \text{section} \}$ とおく.

Prop 3.2.4 : $s_1, s_2 \in \mathrm{Sect}(TM)$ について

$$s_1 + s_2 : M \to TM, \quad p \mapsto (p, v_p^{s_1} + v_p^{s_2})$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $s \in \mathrm{Sect}(TM)$ について

$$\lambda s : M \to TM, \quad p \mapsto (p, \lambda v_p^{s})$$

と定めれば, $\mathrm{Sect}(TM)$ はベクトル空間となる.

Prop 3.2.5

各 $f \in C^\infty(M)$, $s \in \mathrm{Sect}(TM)$ について

$fs : M \to TM$, $p \mapsto (p, f(p)v_p^s)$ とおく.

このとき

$$C^\infty(M) \times \mathrm{Sect}(TM) \to \mathrm{Sect}(TM)$$
$$(f, s) \mapsto fs$$

は Sect(TM) 上の $C^\infty(M)$ 加群構造を定める.

これからやる事：

$\mathfrak{X}(M)$ を $\mathrm{Sect}(TM)$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群として理解する.

Step 1：単射な $C^\infty(M)$ 加群準同型

$$\varphi : \mathfrak{X}(M) \hookrightarrow \mathrm{Sect}(TM)$$

を自然に構成する.

Step 2：像 $\varphi(\mathfrak{X}(M))$ を section の局所座標表示の言葉で特徴付ける.

Step 1　各 $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ について

$$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \underbrace{(Xf)}_{\in\, C^\infty(M)}(p)$$

とおく.

Prop 3.2.6 : $X_p \in T_pM$　(Hint : 定義)

Def 3.2.7 : 各 $X \in \mathfrak{X}(M)$ について TM の section $\tilde{X}$ を

$$\tilde{X} : M \to TM,\ p \mapsto (p, X_p)$$

と定める.

Theorem 3.2.8 :

$$\varphi : \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Sect}(TM)$$
$$X \mapsto \tilde{X}$$

は 単射 な $C^\infty(M)$ 加群準同型

Hint

示すこと： ① 線型性 (i.e. $(X+Y)_p = X_p + Y_p$, $(\lambda X)_p = \lambda X_p$)

なぜかを考えよ．

② 単射性

(i.e. $\forall p \in M,\ X_p = 0 \Rightarrow X = 0$)

③ $C^\infty(M)$ 加群準同型

(i.e. $\widetilde{(fX)} = f\tilde{X}$)

Step 2

Def 3.2.9 : (Section の局所表示)

各 $s \in \mathrm{Sect}(TM)$, $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ について,

$\xi^s_{u_i} : O \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, n)$ を以下を満たすものとして定める：

(一意に定まる)

各 $p \in O$ について $v^s_p = \sum_{i=1}^{n} \xi^s_{u_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p$

s の定める p における接ベクトル

v^s_p を座標基底の一次結合で書いたときの係数

C^∞級 section を以下で定める：

Def 3.2.10：$s \in \mathrm{Sect}(TM)$ が C^∞級

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ {}^\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}, \ {}^\forall i = 1, \cdots, n, \quad \xi^s_{u_i} \in C^\infty(O)$$

Remark：TM に自然な C^∞級多様体構造を入れて M 上のベクトル束とみなしている場合は、上の条件は "$s : M \to TM$ が C^∞-map" というものと同値になる。

具体的な section の C^∞ 性をチェックするときに以下の命題は便利：

Prop 3.2.11：$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ を（極大とは限らない）atlas on M とする

$s \in \mathrm{Sect}(TM)$ について以下は同値　$(\rightsquigarrow [\mathcal{A}_0] = \mathcal{A})$

(i) s は C^∞ 級

(ii) ${}^\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$, ${}^\forall i = 1, \cdots, n$,

$$\xi^s_{u_i} \in C^\infty(O)$$

$\mathcal{A}_0$ の分だけみれば OK

Def 3.2.12 : $\mathcal{P}(TM) := \{ s \in \mathrm{Sect}(TM) \mid C^\infty級 \}$

とおく.

(文脈に依存する記号なので教科書等を読むときは注意)

Prop 3.2.13 : $\mathcal{P}(TM)$ は $\mathrm{Sect}(TM)$ の

部分 $C^\infty(M)$ 加群

Hint : 示すこと

① $\mathcal{P}(TM)$ は $\mathrm{Sect}(TM)$ の

線型部分空間

② $\forall f \in C^\infty(M), {}^\forall s \in \Gamma(TM),\ fs \in \mathcal{P}(TM)$

Theorem 3.2.14 : $P(TM) = \varphi(\mathfrak{X}(M))$

この定理により $\mathfrak{X}(M)$ と $P(TM)$ を同一視できる.

代数的　　解析的

Proof of Thm 3.2.14

示すこと　① : $P(TM) \subset \varphi(\mathfrak{X}(M))$

② : $\varphi(\mathfrak{X}(M)) \subset P(TM)$

示すこと①：$P(TM) \subset \varphi(\mathfrak{X}(M))$

$\forall s \in P(TM)$ をとる。　㊕ ${}^{\exists}X^s \in \mathfrak{X}(M)$ s.t. $\varphi(X^s) = s$

各 $f \in C^\infty(M)$ について

$$X^s f : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto v_p^s(f)$$ と定める。

Claim: $X^s f \in C^\infty(M)$

(∵) ${}^{\forall}(O, U, x) \in \mathcal{A}$ をとる。

㊕ $(X^s f)|_O \in C^\infty(O)$

各 $p \in O$ について

$$X^s f(p) = v_p^s(f) = \sum_{i=1}^n \xi^s_{x_i}(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p)$$

特に $(X^s f)|_O = \sum_{i=1}^n \xi^s_{x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^\infty(O)$

$C^\infty(O)$ の元

$X^s : C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ f \mapsto X^s f$ とおくと

$X^s \in \mathfrak{X}(M)$ （場のライプニッツ則を確認すればよい：証明略）

このとき定義より $\varphi(X^s) = s$.

Step2 : $\varphi(\mathfrak{X}(M)) \subset P(TM)$

$\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ をとる。

示) $\tilde{X} : M \to TM,\ p \mapsto (p, X_p)$ は C^∞ 級

i.e. $\forall (O, U, x) \in \mathcal{A},\ \xi^{\tilde{X}}_{x_i} \in C^\infty(O)\ (i = 1, \cdots, n)$

単に $\xi^{X}_{x_i}$ と書く。

$\forall (O, U, x) \in \mathcal{A}$

$\forall i = 1, \cdots, n$ をとる。

示) $\xi^{X}_{x_i} \in C^\infty(O)$

以下を示せば十分

示 ${}^{\forall} p \in O$, ${}^{\exists} V$: pの開近傍 in O s.t.

$$\xi^X_{x_i}\big|_V \in C^\infty(V)$$

座標関数 $x_i : O \to \mathbb{R}$, $p \mapsto$ "$x(p)$の第 i 成分"

を考えると, $x_i \in C^\infty(O)$ から $\xi^X_{x_i}(q) = X_q x_i$ $({}^{\forall} q \in O)$

Thm 2.2.3 より pの開近傍 V in O と $\tilde{x}_i \in C^\infty(M)$ であって

$\tilde{x}_i|_V = x_i|_V$ となるものがとれる.

$X\tilde{x}_i \in C^\infty(M)$ なので、以下を示せば十分

示) $(X\tilde{x}_i)|_V = \xi^X_{x_i}|_V$

以下の定理を使う：

Theorem 3.2.15　M : n-mfd, $p \in M$ とする.

$f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ とし,

「$\exists V$: pの開近傍 in M s.t. $f_1|_V = f_2|_V$」を仮定する.

このとき 任意の $v \in T_pM$ について $v(f_1) = v(f_2)$

$\forall q \in V$ とする.

$$(X\tilde{u}_i)(q) = X_q \tilde{u}_i$$

$$= X_q u_i \quad (\because \text{Thm } 3.2.15)$$

$$= \xi^X_{u_i}(q)$$

特に $(X\tilde{u}_i)|_V = (\xi^X_{u_i})|_V$ ☒

"Xu_i" は定義されていなかった.
その代わりに $X\tilde{u} \in C^\infty(M)$ を考えた.

補足：Thm 3.2.15 の証明

$v \in T_pM$ をとる．$h = f_1 - f_2 \in C^\infty(M)$ とおく．

V 上でゼロ

(示) $v(h) = 0$．

(p, V) についての cut-off 関数 $b \in C_c^\infty(M)$ をとる．

定義より $h = \underbrace{(1-b)}_{}\cdot h$

V 以外で常に 1，p のまわりでゼロ

従って $v(h) = v((1-b)\cdot h)$

$= v(1-b)\cdot \underbrace{h(p)}_{=0} + \underbrace{(1-b)(p)}_{=0}\cdot v(h)$

$= 0$ ∎

いま $\mathfrak{X}(M)$ は ブラケット積 $[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X$ によって

Lie 代数になるのであった (Theorem 3.1.7)

同型 $\varphi: \mathfrak{X}(M) \xrightarrow{\sim} \Gamma(TM)$ を通じて

$\Gamma(TM)$ にも Lie 代数の構造 $[\ ,\ ]$ が誘導される.

Prop 3.2.16: $X, Y \in \Gamma(TM)$ とする.

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ を固定する.

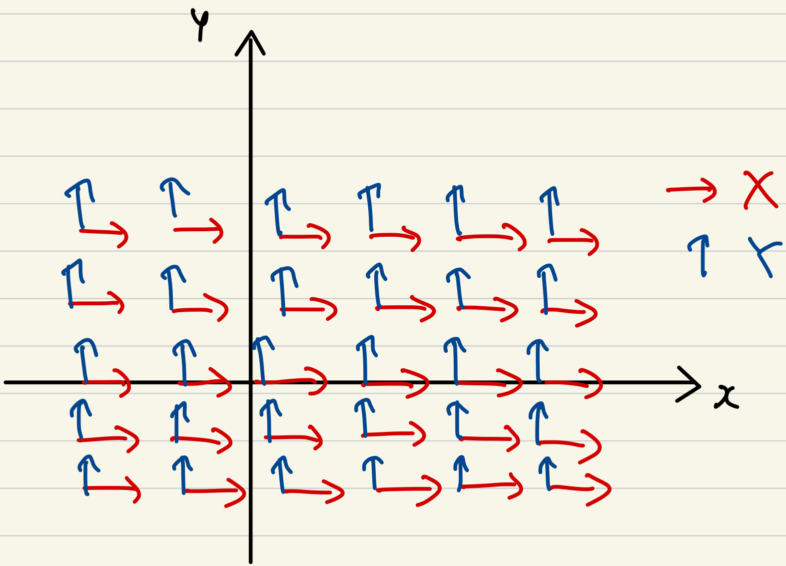
このとき $$\xi^{[X,Y]}_{u_i} = \sum_{l=1}^{n} \left(\xi^X_{u_l} \cdot \frac{\partial \xi^Y_{u_i}}{\partial u_l} - \xi^Y_{u_l} \cdot \frac{\partial \xi^X_{u_i}}{\partial u_l} \right)$$

$C^\infty(O)$ の元

ブラケット積の気持ち：

"ベクトル場に沿った点の動き" について考える.

$M = \mathbb{R}^2$ 　 $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ の場合



"X に沿って t 秒動く"

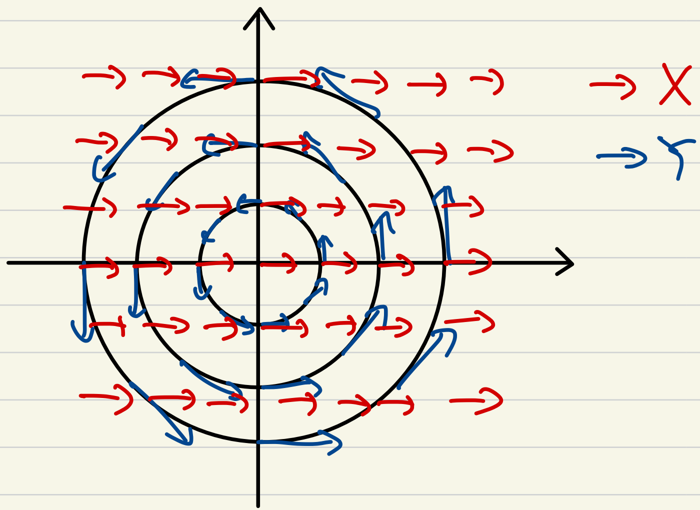
と

"Y に沿って t 秒動く"

は可換

$\rightsquigarrow [X, Y] = 0$

$M = \mathbb{R}^2 \qquad X = \dfrac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ のとき



"Xに沿ってt秒動く"

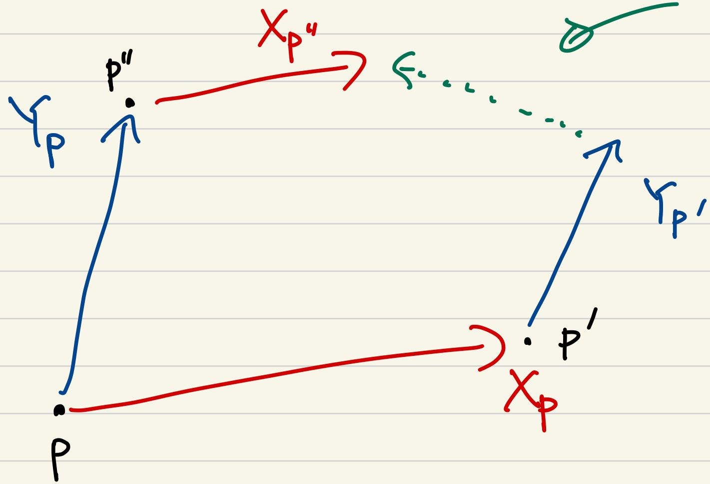
と

"Yに沿ってt秒動く"

は可換でない.

どれぐらい非可換か？

を表したものが $[X, Y]$



このベクトルの“極限”が

$[X, Y]_p$

Section 3.3：ベクトル場の延長

設定：$M = (M, \mathcal{A})$ ： n-mfd

$\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ ： 開部分多様体とみなす．

Lie 代数

記号：$\mathfrak{X}(M) \cong \Gamma(TM)$ ： M 上のベクトル場全体

$\mathfrak{X}(\Omega) \cong \Gamma(T\Omega)$ 　　Ω

各 $p \in \Omega$ について $T_p\Omega \cong T_pM$ （対応は包含写像 $\Omega \hookrightarrow M$ の全微分）

Def 3.3.1: 各 $X \in \Gamma(TM)$ （ $X : M \to TM$, $p \mapsto (p, X_p)$ とみなす ）について

$X|_U : \Omega \to T\Omega$, $p \mapsto (p, X_p)$ と定める.

（ $X_p \in T_p\Omega \cong T_pM$ とみなす ）

Prop 3.3.2: $\forall X \in \Gamma(TM)$, $X|_U \in \Gamma(T\Omega)$.

更に $\mathrm{rest}^M_\Omega : \Gamma(TM) \to \Gamma(T\Omega)$, $X \mapsto X|_U$

は Lie 代数準同型

Remark : 一般には

$$\mathrm{rest}^M_\Omega : \Gamma(TM) \to \Gamma(T\Omega)$$

は全射でも単射でもない.

Theorem 3.3.3 $\forall p \in \Omega$, $\exists V$: pの開近傍 in Ω s.t.

$$\mathrm{rest}^M_V \Gamma(TM) \supset \mathrm{rest}^\Omega_V \Gamma(T\Omega)$$

Hint : Thm 2.2.3 と同じアイデアで証明できる.

点 p のまわりの様子を変えずに
Ω 上のベクトル場を M 上のベクトル場に延長できる!

次の命題は後々（微分形式の外微分の定義）使う.

Cor 3.3.4: $p \in M$ とし, $v_1, \cdots, v_k \in T_pM$ とする.

このとき $X_1, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ であって

$$\begin{cases} (X_i)_p = v_i & ({}^\forall i = 1, \cdots, k) \quad \text{かつ} \\ [X_i, X_j]_p = 0 & ({}^\forall i, j = 1, \cdots, k) \end{cases}$$

となるものが存在する.

次のページに Hint あり

Hint: $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ をとり,

まず O 上のベクトル場 X_i^O $(i=1,\cdots,n)$ として 上のようなものをとる.

具体的には $v_i = \sum_{l=1}^{n} a_l \left(\frac{\partial}{\partial u_l}\right)_p$ と表示したとき,

$$X_i^O : O \to TO, \quad q \mapsto \left(q, \sum_{l=1}^{n} a_l \left(\frac{\partial}{\partial u_l}\right)_q\right)$$ などとする.

このとき $[X_i^O, X_j^O] = 0$ に注意.

その後 Thm 3.3.3 で M 上のベクトル場に延長すればよい ▨