Section 4：ベクトル空間の交代形式と外積

接束（ベクトル束の一種）

Recall：$\Gamma(TM) := \{ X : M \to TM = \bigsqcup_p T_pM \mid C^\infty \text{級 section} \}$

をベクトル場のなす $C^\infty(M)$ 加群とみなせよ

（Section 3.2）

"k次微分形式"の解析的定義に必要なベクトル束は

$$\overset{k}{\wedge}(TM)^\vee = \bigsqcup_{p \in M} \overset{k}{\wedge}(T_pM)^\vee$$

ベクトル空間 T_pM の双対 $T_pM^\vee$ の k回外積

内容

- ベクトル空間の双対空間
- 双対基底
- ベクトル空間上の交代形式
- 交代形式の外積
- 交代形式のなすベクトル空間の基底

§4.1：双対空間

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

V : n-dim'l vector space / $\mathbb{R}$

Def 4.1.1：写像 $\alpha : V \to \mathbb{R}$ が線型汎関数 (linear functional)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ α は線型写像

Def. 4.1.2 $V^\vee := \{ \alpha : V \to \mathbb{R} \mid \text{linear functional} \}$

(V^* と書く流儀もある)

Prop 4.1.3: $V^\vee$ はベクトル空間.

和: $\alpha+\beta : V \to \mathbb{R}$
$$v \mapsto \alpha(v)+\beta(v)$$

スカラー倍: $\lambda\alpha : V \to \mathbb{R}$
$$v \mapsto \lambda\cdot\alpha(v)$$
$(\alpha, \beta \in V^\vee,\ \lambda \in \mathbb{R})$

ベクトル空間 $V^\vee$ を V の<u>双対空間</u>という.

@ 双対基底

Q : $V^\vee$ の次元は？

(V は有限次元)
としている.

A : $\dim V \,(= n)$ と一致！

設定: $\mathcal{B} = \{e_1 \cdots e_n\}$: V の基底

Def. 4.1.4

$w_1, \cdots, w_n : V \to \mathbb{R}$ を

$$w_i(v) = w_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^v e_j\right) = a_i^v$$

$\left\{ \begin{array}{l} w_i(e_i) = 1 \\ w_i(e_j) = 0 \\ (i \neq j) \end{array} \right.$

(ただし $v \in V$ について $v = \sum_{j=1}^{n} a_j^v e_j$ として) と定める.

Theorem 4.1.5 $\mathcal{B}^\vee := \{w_1 \cdots w_n\}$ は $V^\vee$ の基底

この $\mathcal{B}^\vee$ を $\mathcal{B}$ の双対基底という

Proof of Thm 4.1.5

示 (1) $w_i \in V^\vee$ i.e. $w_i : V \to \mathbb{R}$ は線型 $(\forall i = 1, \cdots m)$

(2) $\mathcal{B}^\vee := \{w_1, \cdots, w_n\}$ は一次独立 in $V^\vee$

(3) $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \text{-} \mathcal{B}^\vee = V^\vee$

(1) は easy

(2) を示す. $(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ について $\sum_i c_i w_i = 0$ とする.

示 $(c_1 \cdots c_n) = 0$ i.e. $\forall i_0 = 1, \cdots, n$, $c_{i_0} = 0$.

$\forall i_0 = 1, \cdots, n$ をとる. $v = e_{i_0}$ について

$0 = \left(\sum_i c_i w_i\right)(v) = \sum_i c_i \cdot w_i(v) = \sum_i c_i \, w_i(e_{i_0}) = c_{i_0}$

(3) を示す.

(示) $\forall \alpha \in V^\vee$, $\exists (c_1 \cdots c_m) \in \mathbb{R}^m$ s.t. $\alpha = \sum_{i=1}^{m} c_i w_i$

$\forall \alpha \in V^\vee$ をとる

$c_i := \alpha(e_i) \quad (i = 1, \cdots, m)$ とおく

(示) $\alpha = \sum_i c_i w_i$ i.e. $\forall v \in V$, $\alpha(v) = \sum_i c_i w_i(v)$

$\forall v \in V$ をとる. $v = \sum_i a_i^v e_i$ とおく.

$\alpha(v) = \alpha(\sum a_i^v e_i) = \sum a_i^v \alpha(e_i) = \sum a_i^v \cdot c_i$

$\sum c_i w_i(v) = \sum_i c_i \cdot a_i^v$

証.

Example 4.1.6 $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd
$p \in M$ とする.

- 接空間 T_pM は n-dim'l vector space $/\mathbb{R}$

  $\rightsquigarrow$ 双対空間 $(T_pM)^\vee$ も n-dim'l vector space $/\mathbb{R}$

- $f \in C^\infty(M)$ とすると,

  $df_p : T_pM \to \mathbb{R}, \quad v \longmapsto v(f)$

  は linear functional. つまり $df_p \in (T_pM)^\vee$

- $(O, U, x) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ を固定する.

$\mathcal{B} := \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1,\cdots,n}$ は T_pM の基底

Def 4.1.7 双対基底 $\mathcal{B}^\vee$ を

$\mathcal{B}^\vee = \left\{ (dx_i)_p \right\}_{i=1,\cdots,n}$ のように書く.

(記号の説明)

つまり $(dx_i)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ は線型で

$$(dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$ となるもの

§4.2 交代形式

設定: V : n-dim'l vector space $/ \mathbb{R}$

$k \cancel{= 0, 1, 2, \cdots, n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def. 4.2.1 写像 $\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$ が V 上の k 次交代形式

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) ω は多重線型

&

(2) ω は交代的

Def. 4.2.1 (再掲) 写像 $\omega : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$

が V 上の k 次交代形式

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) ω は多重線型

i.e. $^\forall l = 1, \cdots, k$ (各成分で線型)

& $\omega(v_1, v_2, \cdots, v_{l-1}, a v_l + b v_l', v_{l+1}, \cdots v_k)$

$= a\,\omega(v_1, \cdots, \cdot, \cdots, v_k) + b\,\omega(v_1, \cdots, v_l', \cdots v_k)$

$(^\forall a, b \in \mathbb{R}, {}^\forall v_1 \cdots v_l, v_l', \cdots v_k \in V)$

(2) ω は交代的 (入れ替えると -1 倍)

i.e. $^\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$ (k 次対称群)

$\omega(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\omega(v_1 \cdots v_k)$

Remark: たとえば ω : V 上の 2-次交代形式 について

" $\omega(v, w) = \omega(v, 0) + \omega(0, w)$ "

のようにはならない!

Remark;

この講義では $k=0$ のとき $\underbrace{V\times\cdots\times V}_{0} := \mathbb{R}$ と定める.

特に "0次交代形式 on V" とは

$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への線型写像 のことと定める.

Remark : 1次交代形式 on V とは

V 上の linear functional のこと.

Example 4.2.2 : V : 2次元 とし, $\mathbb{B} = \{e_1, e_2\}$: V の基底とする.

$$\omega_{\mathbb{B}} : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{matrix} ae_1 \\ + \\ ce_2 \end{matrix}, \begin{matrix} be_1 \\ + \\ de_2 \end{matrix} \right) \mapsto \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とすると

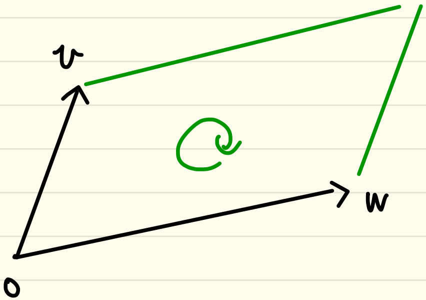
$\omega_{\mathbb{B}}$ は V 上の 2次交代形式.

交代形式の気持ち

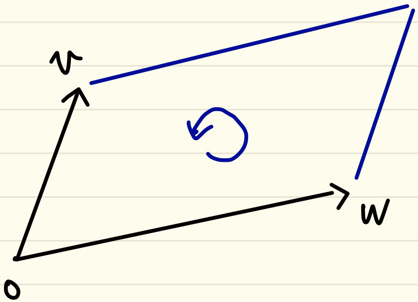
"原点から生えている何本かのベクトルで張られた k-次元平行四辺形"

に対して、それぞれ実数を対応させたい。

ω : 2次交代形式

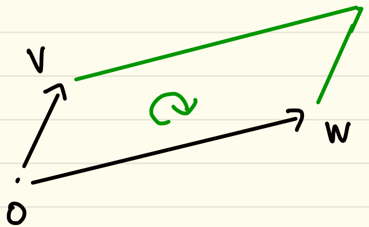


$$\longmapsto \omega(v, w)$$

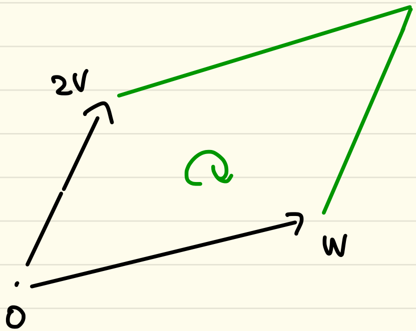


$$\longmapsto \omega(w, v) = \left(-\omega(v, w) \right)$$

ω : 2次交代形式



$\longmapsto \omega(v, w)$



$\longmapsto \omega(2v, w)$

$(= 2\omega(v, w))$

Def 4.2.3

$$\bigwedge^k V^\vee := \{ V \text{ 上の } k \text{ 次交代形式} \}$$

とおく.

Remark

$$\bigwedge^0 V^\vee = \{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{線型} \} \cong \mathbb{R}$$

$$\bigwedge^1 V^\vee = V^\vee$$

Prop 4.2.4 $\bigwedge^k V^\vee$ はベクトル空間 $/\mathbb{R}$

和： $\omega_1 + \omega_2 : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$

$(v_1 \cdots v_k) \mapsto \omega_1(v_1 \cdots v_k) + \omega_2(v_1 \cdots v_k)$

スカラー倍： $\lambda\omega : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$

$(v_1 \cdots v_k) \mapsto \lambda \cdot \omega(v_1 \cdots v_k)$

$\left(\omega_1, \omega_2, \omega \in \bigwedge^k V^\vee, \ \lambda \in \mathbb{R} \right)$

Q : $\bigwedge^k V^\vee$ の次元は?

A : $\begin{cases} \binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & (\text{if } k \leq n), \\ 0 & (\text{if } k > n) \end{cases}$

(ただし $n = \dim V$)

$\boxed{\begin{array}{l} k \leq n \text{ の場合は次節で基底を与え、} \\ k > n \text{ の場合は次ページで議論する.} \end{array}}$

Theorem 4.2.5 $\omega \in \bigwedge^k V^\vee$, $v_1, \cdots, v_k \in V$ とする.

このとき $\omega(v_1, \cdots, v_k) \neq 0 \Rightarrow v_1, \cdots, v_k$ は一次独立

Cor 4.2.6 $k > n$ とする. このとき $\bigwedge^k V^\vee = 0$

Proof of Theorem 4.2.5

対偶を示す. $v_1, \cdots, v_k$ が一次従属であると仮定する.

示 $\omega(v_1, \cdots, v_k) = 0$

示 $\omega(v_1, \cdots, v_k) = 0$

いま $v_1, \cdots, v_k$ は一次従属なので

$i_0 \in \{1, \cdots, k\}$ と $\{a_i \in \mathbb{R}\}_{i \neq i_0}$ であって

$$v_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} a_i v_i$$ となるものがとれる.

次の Lemma を使って $\omega(v_1, \cdots, v_k) = 0$ を示す.

Lemma 4.2.6 :

$\omega \in \bigwedge^k V^\vee$, $v_1, \cdots, v_k \in V$ とする.

$^\exists i \neq j$ について $v_i = v_j$ とすると, $\omega(v_1, \cdots, v_k) = 0$

($\because$ ω の交代性から明らか)

(+ $\mathbb{R}$ が標数 $\neq 2$)

$$
\begin{aligned}
\omega(v_1, \cdots, v_k) &= \omega\Big(v_1, \cdots, v_{i_0-1}, \sum_{i \neq i_0} a_i v_i, v_{i_0+1}, \cdots, v_k\Big) \\
&= \sum_{i \neq i_0} a_i \underbrace{\omega(v_1, \cdots, v_{i_0-1}, v_i, v_{i_0+1}, \cdots, v_k)}_{\text{Lemma 4.2.6 より } 0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

多重線型性

$\blacksquare$

§4.3 : 交代形式の外積

設定 : V : n-dim'l vector space / $\mathbb{R}$

$k, l = 0, 1, 2, \cdots, n$ を $k + l \leq n$

となるものとする.

外積 : $\left(\bigwedge^k V^\vee\right) \times \left(\bigwedge^l V^\vee\right) \to \bigwedge^{k+l} V^\vee$

$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2$

と定義しよう

ω_1 : k 次交代形式

ω_2 : l 次交代形式　　とする.

Def 4.3.1 : $\omega_1 \wedge \omega_2 : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k+l} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

各 $(v_1 \cdots v_{k+l}) \in V \times \cdots \times V$ について

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1 \cdots v_{k+l})$$

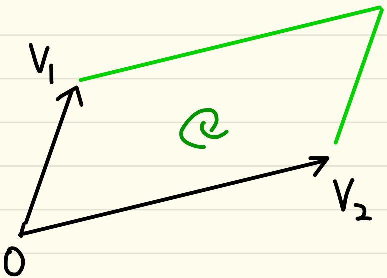
$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \underbrace{\omega_1(v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(k)})}_{\mathbb{R}}\, \underbrace{\omega_2(v_{\sigma(k+1)} \cdots v_{\sigma(k+l)})}_{\mathbb{R}}$$

と定める.

Example 4.3.2 :

$k = l = 1$ のとき

$$\omega_1 \wedge \omega_2 (v_1, v_2) = \omega_1(v_1)\,\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\,\omega_2(v_1)$$



Recall : $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ のとき

“v_1, v_2 の定める平行四辺形”の面積 $= |ad - bc|$

Prop. 4.3.3: $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \bigwedge^{k+l} V^\vee$

Prop 4.3.4: $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{kl}\, \omega_2 \wedge \omega_1$

Prop 4.3.5

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1 \cdots v_{k+l})$$

$$= \sum_{\substack{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le k+l \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_l \le k+l \\ \{i_1 \cdots i_k\} \sqcup \{j_1 \cdots j_l\} = \{1, \cdots, k+l\}}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+l \\ i_1 & \cdots & i_k & j_1 & \cdots & j_l \end{pmatrix} \omega_1(v_{i_1}, \cdots, v_{i_k})\, \omega_2(v_{j_1}, \cdots, v_{j_l})$$

並びえをキレイにした

Example 4.3.6

V: 2次元 とし, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$: V の基底 とする.

$\mathcal{B}^\vee = \{w_1, w_2\}$ とすると, $w_1, w_2 \in V^\vee = \bigwedge^1 V^\vee$

このとき

$w_1 \wedge w_2 : V \times V \to \mathbb{R}$

$$\left(\begin{matrix} ae_1 \\ + \\ ce_2 \end{matrix}, \begin{matrix} be_1 \\ + \\ de_2 \end{matrix} \right) \longmapsto w_1\begin{pmatrix} ae_1 \\ + \\ ce_2 \end{pmatrix} w_2\begin{pmatrix} be_1 \\ + \\ de_2 \end{pmatrix} - w_1\begin{pmatrix} be_1 \\ + \\ de_2 \end{pmatrix} w_2\begin{pmatrix} ae_1 \\ + \\ ce_2 \end{pmatrix}$$

$$= ad - bc$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

特に $w_1 \wedge w_2 = \omega_{\mathcal{B}} \in \bigwedge^2 V^\vee$ (cf. Ex 4.2.2)

Prop 4.3.7 $\left(\bigwedge^k V^\vee\right) \times \left(\bigwedge^l V^\vee\right) \to \bigwedge^{k+l} V^\vee$

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2$$

は 双線型

i.e.

$$(a\omega_1 + b\omega_1') \wedge \omega_2 = a(\omega_1 \wedge \omega_2) + b(\omega_1' \wedge \omega_2)$$

$$\omega_1 \wedge (a\omega_2 + b\omega_2') = a(\omega_1 \wedge \omega_2) + b(\omega_1 \wedge \omega_2')$$

$$\left(a, b \in \mathbb{R},\ \omega_1 \in \bigwedge^k V^\vee,\ \omega_2 \in \bigwedge^l V^\vee\right)$$

Prop 4.3.8 外積 "$\wedge$" は "associative"

i.e. $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$

$$\left(\omega_1 \in \bigwedge^k V^\vee,\ \omega_2 \in \bigwedge^l V^\vee,\ \omega_3 \in \bigwedge^s V^\vee,\ k+l+s \le n\right)$$

Cor 4.3.9 $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k V^\vee$ は 外積 について $\mathbb{R}$代数

(外積代数 on $V^\vee$)

Cor 4.2.6 より $\bigwedge^k V^\vee = 0$ for any $k > n$

Prop 4.3.8 より　$\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in V^\vee$ について

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \bigwedge^k V^\vee$$

が定義される．$(k \leq n)$

Prop. 4.3.10

$v_1 \cdots v_k \in V$ について

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(v_1, \cdots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \cdots & \alpha_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \cdots & \alpha_k(v_k) \end{pmatrix}$$

Hint：帰納法 + Prop 4.3.5

Theorem 4.3.11

$\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$: Vの基底

$\mathcal{B}^\vee = \{w_1, \cdots, w_n\}$: $\mathcal{B}$の双対基底

$k = 0, 1, \cdots n$ を固定.

このとき

$\overset{k}{\wedge}\mathcal{B}^\vee := \{ w_{i_1} \wedge w_{i_2} \wedge \cdots \wedge w_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \}$

は $\overset{k}{\wedge} V^\vee$ の基底

特に $\dim \overset{k}{\wedge} V^\vee = \binom{n}{k}$.

Proof of Thm 4.3.11:

示 ① $\overset{k}{\wedge} B^\vee$ は一次独立

② $\overset{k}{\wedge} B^\vee$ は $\overset{k}{\wedge} V^\vee$ を張る.

以下簡単のため

$$[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$\binom{[n]}{k} := \{ I \subset [n] \mid \# I = k \} \quad \text{とおき,}$$

各 $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \in \binom{[n]}{k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ について

$W_I := w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}$ とおく.

このとき $\overset{k}{\wedge} B^\vee = \{ W_I \mid I \in \binom{[n]}{k} \}$ に注意.

① 示 $\bigwedge^k \mathfrak{B}^\vee$ は一次独立

$\{a_I \in \mathbb{R}\}_{I \in \binom{[n]}{k}}$ であって $\sum_I a_I w_I = 0$ in $\bigwedge^k V^\vee$ となる

ものを任意にとる.

示 $\forall I,\ a_I = 0$

$\forall I \in \binom{[n]}{k}$ をとる.

示 $a_I = 0$

以下の Lemma を使う

Lemma 4.3.12 $I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ とする.

このとき各 $I' \in \binom{[n]}{k}$ について

$$W_{I'}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = \begin{cases} 1 & (\text{if } I = I') \\ 0 & (\text{if } I \neq I') \end{cases}$$

($\because$ Prop 4.3.10)

いま

$$0 = \left(\sum_{I'} a_{I'} W_{I'}\right)(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$$

$$= \sum_{I'} a_{I'} \left(W_{I'}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) \right) = a_I$$

① 証明終

② 示 $\bigwedge^k B^\vee$ は $\bigwedge^k V^\vee$ を張る.

$\omega \in \bigwedge^k V^\vee$ を fix

示 $^\exists\{a_I \in \mathbb{R}\}_{I \in \binom{[n]}{k}}$ s.t. $\omega = \sum_I a_I w_I$

各 $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \in \binom{[n]}{k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ について

$$a_I := \omega(e_{i_1}, \cdots e_{i_k}) \in \mathbb{R}$$ とおく.

示 $\omega = \sum_I a_I w_I$

$v_1, \cdots, v_k \in V$ を任意にとる.

(示) $\omega(v_1, \cdots, v_k) = \sum_I a_I w_I (v_1, \cdots, v_k)$

各 j について

$$v_j = \sum_{i_j=1}^{n} \underbrace{w_{i_j}(v_j)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{e_{i_j}}_{\in V}$$ に注意

$\{w_1, \cdots, w_n\}$ は $\{e_1, \cdots, e_n\}$ の双対基底

これより

$$\omega(v_1,\cdots,v_k) = \omega\left(\sum_{i_1} W_{i_1}(v_1)e_{i_1}, \cdots, \sum_{i_k} W_{i_k}(v_k)e_{i_k}\right)$$

$$= \sum_{i_1\cdots i_k} W_{i_1}(v_1)\cdots W_{i_k}(v_k)\,\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})$$

ω の交代性 と Thm 4.2.5 より

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_k}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\, W_{i_1}(v_{\sigma(1)})\cdots W_{i_k}(v_{\sigma(k)})\right)\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})$$

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \underbrace{\left((W_{i_1}\wedge\cdots\wedge W_{i_k})(v_1,\cdots,v_k)\right)}_{W_I(V_1,\cdots,V_k)}\ \underbrace{\omega(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})}_{= a_I}$$

$$= \sum_{I} a_I\, W_I(V_1,\cdots,V_k)$$

(∵ Prop 4.3.10)

∎

（追加スライド）

V の基底のとり換えについて

設定：$\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$, $\mathcal{B}' = \{e_1', \cdots, e_n'\}$ V の基底.

各 i について $e_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e_j'$ と書く.

$P = (p_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ とおく（基底の変換行列）

$\mathcal{B}^\vee = \{w_1, \cdots, w_n\}$, $(\mathcal{B}')^\vee = \{w_1', \cdots, w_n'\}$.

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ の双対基底

記号：

$$\binom{[n]}{k} := \{\ \{1, \cdots, n\}\ \text{の}\ k\ \text{点部分集合}\ \}$$

各 $I := \{i_1, \cdots, i_k\} \in \binom{[n]}{k}$ について

$(i_1 < \cdots < i_k)$

$$w_I := w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}$$
$$w'_I := w'_{i_1} \wedge \cdots \wedge w'_{i_k}$$
$\in \bigwedge^k V^\vee$ とおく．

また $I, J \in \binom{[n]}{k}$ について

$$P_{IJ} := (p_{ij})_{i \in I, j \in J}$$ とおく（小行列）

Theorem 4.3.13 $I \in \binom{[n]}{k}$ を fix.

このとき

$$w_I = \sum_{J \in \binom{[n]}{k}} (\det P_{I,J})\, w'_J$$

Cor 4.3.14 ($k=n$ の場合：積分論で必要)

$$(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) = (\det P) \cdot (w'_1 \wedge \cdots \wedge w'_n)$$

Proof of Thm 4.3.13 : $I \in \binom{[n]}{k}$ を fix

$w_I \in \bigwedge^k V^\vee$ であり

$\{ w'_J \mid J \in \binom{[n]}{k} \}$ は $\bigwedge^k V^\vee$ の基底であるから (Thm 4.3.11)

$$w_I = \sum_{J \in \binom{[n]}{k}} a_J w'_J \qquad (a_J \in \mathbb{R})$$

と一意的に表せる.

示 $\forall J \in \binom{[n]}{k}$, $a_J = \det P_{I,J}$

$\forall J \in \binom{[n]}{k}$ をとる.

示) $a_J = \det P_{I,J}$

Lemma 4.3.12 より $J = \{j_1, \cdots, j_k\}$ $(j_1 < \cdots < j_k)$

と書いたとき,

各 $J' \in \binom{[n]}{k}$ について

$$w_{J'}(e_{j_1}', \cdots, e_{j_k}') = \begin{cases} 1 & (J = J') \\ 0 & (J \neq J') \end{cases}$$

に注意すると, $a_J = w_I(e_{j_1}', \cdots, e_{j_k}')$

示. $w_I(e'_{j_1}, \cdots, e'_{j_k}) = \det P_{I,J}$

左辺 $= (w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k})(e'_{j_1}, \cdots, e'_{j_k})$

$$= \det \begin{pmatrix} w_{i_1}(e'_{j_1}) & \cdots & w_{i_1}(e'_{j_k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{i_k}(e'_{j_1}) & \cdots & w_{i_k}(e'_{j_k}) \end{pmatrix} \quad (\because \text{Prop } 4.2.10)$$

$$= \det \begin{pmatrix} P_{i_1 j_1} & \cdots & P_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{i_k j_1} & \cdots & P_{i_k j_k} \end{pmatrix} = \det P_{IJ}$$

$(\because \ w_i(e'_j) = P_{ij})$

$\boxed{証}$