交代形式の厳密な定義

（0次交代形式の厳密な取り扱いについて）

設定

V：ベクトル空間 $/\mathbb{R}$

X：有限集合（$X=\emptyset$ でもよい）

記号

$\mathfrak{S}_X := \{\sigma : X \to X \mid$ 全単射$\}$

$\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_X \to \{\pm 1\}$：符号

ベクトル空間とみなす

$V^X := \{v : X \to V$：写像$\}$

$x \mapsto v_x$

Def: 各 $x \in X$, $a \in V^{X \setminus \{x\}}$ について

$\iota_a^x : V \to V^X,\ v_x \mapsto \iota_a^x(v_x) : X \to V$

$$y \mapsto \begin{cases} v_x & (\text{if } x = y) \\ a_y & (\text{if } x \neq y) \end{cases}$$

とおく.

Def: $\omega : V^X \to \mathbb{R}$ が multi-linear

$\forall x \in X,\ \forall a \in V^{X \setminus \{x\}}$,

$\omega \circ \iota_a^x : V \to \mathbb{R}$ は線型

Prop $\mathrm{Mult}(V, X; \mathbb{R}) := \{\omega : V^X \to \mathbb{R} \mid \text{multi-linear}\}$

は $\mathrm{Map}(V^X, \mathbb{R})$ の線型部分空間

Def 各 $v \in V^X$, 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_X$ について

$\sigma v \in V^X$ を $\sigma v : X \to V,\ x \mapsto v_{\sigma^{-1}x}$ と定めよ.

Prop 各 $\omega \in \mathrm{Mult}(V, X; \mathbb{R})$, $\sigma \in \mathfrak{S}_X$ について

$\omega^\sigma : V^X \to \mathbb{R},\ v \mapsto \omega(\sigma v)$ とおく.

このとき $\omega^\sigma \in \mathrm{Mult}(V, X; \mathbb{R})$

Def: $\omega \in \mathrm{Mult}(V, X; \mathbb{R})$ が交代形式

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_X, \quad \omega^\sigma = \underbrace{(\mathrm{sgn}\,\sigma)}_{\{\pm 1\} \subset \mathbb{R}} \omega$$

Prop:

$\mathrm{Alt}(V, X; \mathbb{R}) := \{ \omega \in \mathrm{Mult}(V, X; \mathbb{R}) \mid \omega : \text{交代形式} \}$

は $\mathrm{Mult}(V, X; \mathbb{R})$ の線型部分空間

◎ $X=\emptyset$ のときは?

- $V^{\emptyset} := \{\emptyset \to V\} = \{\underset{\sim}{\emptyset}\}$

空写像 : $\emptyset \to V$

- $\mathfrak{S}_{\emptyset} := \{\underset{\sim}{\emptyset}\}$

空写像 $\emptyset \to \emptyset$

- $\mathrm{sgn}\, \emptyset = 1$

Claim : $\mathrm{Alt}(V, \emptyset; \mathbb{R}) = \mathrm{Map}(\{\emptyset\}, \mathbb{R}) \doteqdot \mathbb{R}$

- $\emptyset$ は元を持たないので

任意の写像 $\omega : V^{\emptyset} \to V$ は multi-linear

特に $\mathrm{Mult}(V, \emptyset; \mathbb{R}) = \mathrm{Map}(V^{\emptyset}, \mathbb{R}) = \mathrm{Map}(\{\emptyset\}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

1点集合

- また任意の $\omega \in \mathrm{Mult}(V, \emptyset; \mathbb{R})$

任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_{\emptyset}$ について

$\sigma = \emptyset$ より $\mathrm{sgn}\,\sigma = \mathrm{sgn}\,\emptyset = 1$

$v = \emptyset \in V^{\emptyset}$ について $\sigma v = \emptyset \in V^{\emptyset}$

よって $\omega^{\sigma} = \omega$

特に $\mathrm{Mult}(V, \emptyset; \mathbb{R}) = \mathrm{Alt}(V, \emptyset; \mathbb{R})$

これより $\mathrm{Alt}(V, \emptyset; \mathbb{R}) = \mathrm{Mult}(V, \emptyset; \mathbb{R}) = \mathrm{Map}(\{\emptyset\}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

Def: 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$[n] := \{k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq n\} \subset \mathbb{Z}$ とおく.

($[0] = \emptyset$ に注意)

Def: $\mathrm{Alt}(V, [n]; \mathbb{R})$ の元を n 次交代形式と呼ぶ

$\bigwedge^n V^\vee := \mathrm{Alt}(V, [n]; \mathbb{R})$ とおく.

Prop: このとき $\bigwedge^0 V^\vee \cong \mathbb{R}$.

0 次交代形式はスカラーと同一視できる.