Section 5 : 一次微分形式

一次微分形式の仕事 :

多様体の各点で,

接空間の線型汎関数を与える.

各点で接ベクトルを食べて実数を返す

⇕

ベクトル場を食べて関数を返す

内容：

定義が簡単，抽象論に使いやすい

- 一次微分形式の代数的定義　（ベクトル場を食べて関数を返す）

- 一次微分形式の解析的定義　（各点で接ベクトルを食べて定数を返す）

意味が理解しやすい，具体的な計算に使いやすい．

Section 5.1 : 一次微分形式の代数的定義

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd

記号 : $C^\infty(M)$: M 上の C^∞ 級関数のなす可換 $\mathbb{R}$ 代数

積構造により $C^\infty(M)$ 加群とみなす

$\mathfrak{X}(M) \coloneqq \Gamma(TM)$

M 上のベクトル場のなす $C^\infty(M)$ 加群

Def. 5.1.1 : $\omega : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ が一次微分形式 on M

(または differential 1-form)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\omega : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ は

$C^\infty(M)$ 加群準同型

i.e. (i) 線型写像

かつ

(ii) 関数倍を保つ (i.e. $\forall f \in C^\infty(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M)$

$\omega(\underbrace{fX}_{\in \mathfrak{X}(M)}) = \underbrace{f}_{\in C^\infty(M)} \cdot \omega(X)$

Def 5.1.2 : $\Lambda^1(M) := \{\, \omega : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M) \mid \omega$ は 1-form $\}$

Prop 5.1.3 : $\Lambda^1(M)$ は $C^\infty(M)$ 加群

ただし，和，スカラー倍，関数倍の構造は以下で定める．

@ 和 : $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(M)$ について

$$\omega_1 + \omega_2 : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),\ X \mapsto \omega_1(X) + \omega_2(X)$$

$C^\infty(M)$ の和

@ スカラー倍 : $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Lambda^1(M)$ について

$C^\infty(M)$ のスカラー倍

$$\lambda\omega : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),\ X \mapsto \lambda \cdot \omega(X)$$

@ 関数倍 : $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Lambda^1(M)$ について

$C^\infty(M)$ の関数倍

$$f\omega : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),\ X \mapsto f \cdot \omega(X)$$

Example 5.1.4 : 各 $f \in C^\infty(M)$ について

$$df : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M), \quad X \mapsto Xf$$

と定めると, df は 1-form on M

Section 5.2 : 一次微分形式の解析的定義

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd

記号 : T_pM : $p \in M$ における M の接空間

$T_p^\vee M := (T_pM)^\vee := \{ \alpha : T_pM \to \mathbb{R} \mid$ 線型 $\}$

T_pM の双対空間

Def 5.2.1 :

$$T^\vee M := \{ (p, \alpha) \mid p \in M,\ \alpha \in T_p^\vee M \}$$

$$\left(= \bigsqcup_{p \in M} T_p^\vee M \right)$$

を M の余接束 (cotangent bundle) と呼ぶ

Remark : $T^\vee M$ には自然な 2n-mfd 構造が定まり,

M 上の"ベクトル束"の構造が定まることが知られている.

この講義では単なる集合とみなす.

Def 5.2.2 : 写像 $s : M \to T^\vee M$ が $T^\vee M$ の section

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in M$, $\exists! \alpha_p^s \in T_p^\vee M$ s.t. $s(p) = (p, \alpha_p^s)$

Mの各点で接空間上の線型汎関数を定める.

Def 5.2.3 : $\mathrm{Sect}(T^\vee M) := \{ s : M \to T^\vee M \mid \text{section} \}$

Prop 5.2.4 : $\mathrm{Sect}(T^\vee M)$ は $C^\infty(M)$ 加群

ただし、和, スカラー倍, 関数倍 は 以下で定める.

◎ 和 : $s_1, s_2 \in \mathrm{Sect}(T^\vee M)$ について

$T_p^\vee M$ の元

$$s_1 + s_2 : M \to T^\vee M,\ p \mapsto (p,\ \alpha_p^{s_1} + \alpha_p^{s_2})$$

◎ スカラー倍 : $\lambda \in \mathbb{R}$, $s \in \mathrm{Sect}(T^\vee M)$ について

$$\lambda s : M \to T^\vee M,\ p \mapsto (p,\ \lambda \cdot \alpha_p^{s})$$

◎ 関数倍 : $f \in C^\infty(M)$, $s \in \mathrm{Sect}(T^\vee M)$ について

$$fs : M \to T^\vee M,\ p \mapsto (p,\ f(p) \cdot \alpha_p^{s})$$

C^∞-section of $T^\vee M$ をこれから定義する.

Def 5.2.5 : 各 $p \in M$, $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ について

(Def. 4.1.7 の再掲)

T_pM の座標基底 $\{(\frac{\partial}{\partial u_i})_p\}_{i=1,\cdots,n}$ の

双対基底 of $T_p^\vee M$ を $\{(du_i)_p\}_{i=1,\cdots,n}$ と書く.

つまり $(du_i)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ とおく.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p \mapsto a_i$$

Def 5.2.6 (section の局所表示)

$s \in \mathrm{Sect}(T^{\vee}M)$, $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ とする.

このとき

$y^{s}_{u_i} : O \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, n)$ を

$\alpha^s_p \in T_p^{\vee}M$ の $\{(du_i)_p\}_i$ による表示

$$\alpha^s_p = \sum_{i=1}^{n} y^s_{u_i}(p) \cdot (du_i)_p \quad (\forall p \in O)$$

が成り立つように定める (一意に定まる).

Def 5.2.7 $s \in \mathrm{Sect}(T^\vee M)$ が C^∞級

$\iff {}^\forall(O, U, x) \in \mathcal{A}$, $\xi^{s}_{x_i} \in C^\infty(O)$

${}^\forall i = 1, \cdots, n$

Def 5.2.8

$\Gamma(T^\vee M) := \{ s \in \mathrm{Sect}(T^\vee M) \mid C^\infty$級$\}$

Def 5.2.9 $\Gamma(T^\vee M)$ は $\mathrm{Sect}(T^\vee M)$ の部分$C^\infty(M)$加群

Section of $T^\vee M$ の気持ち:

M上の"向き付けられた微小線分"の"大きさ"を測るものさし

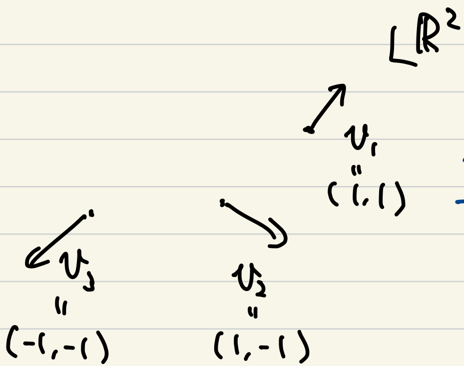
(接ベクトルのこと)　(負でもよい)

Example 5.2.10

$M = \mathbb{R}^2$

$$\omega = dx : \mathbb{R}^2 \to T^\vee \mathbb{R}^2,\quad p \mapsto (dx)_p : T_p\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \mapsto a$$



$\xrightarrow{\omega} \mathbb{R}$ (右向きの大きさを測る)

$\omega(v_1) = 1$

$\omega(v_2) = 1$

$\omega(v_3) = -1$

これからやる事：$\Lambda^1(M)$ と $\Gamma(T^\vee M)$ の間に対応を付ける.

① $C^\infty(M)$ 加群準同型

$\phi : \Gamma(T^\vee M) \to \Lambda^1(M)$ を構成する.

(簡単)

② $C^\infty(M)$ 加群準同型

$\varphi : \Lambda^1(M) \to \Gamma(T^\vee M)$ を構成する.

(well-defined 性の証明が難しい)

③ $\varphi \circ \phi = id_{\Gamma(T^\vee M)}$, $\phi \circ \varphi = id_{\Lambda^1(M)}$ を示す.

(簡単)

帰結

Theorem 5.2.11 $\Lambda^1(M)$ と $\Gamma(T^\vee M)$ は $C^\infty(M)$ 加群として同型

代数的, 解析的 1-form の定義

① $C^\infty(M)$加群準同型 $\Phi : \Gamma(T^\vee M) \to \mathcal{A}^1(M)$ を構成する.

各 $s \in \Gamma(T^\vee M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ について

$$\omega^s(X) : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto \underset{\substack{\cap \\ T_p^\vee M}}{\alpha_p^s}(\underset{\substack{\cap \\ T_pM}}{X_p})$$ とおく.

<u>Lemma 5.2.11</u>: $\omega^s(X) \in C^\infty(M)$

(<u>Hint</u>: ⊗ $^\forall(O, U, \psi) \in \mathcal{A}$, $\omega^s(X)|_O \in C^\infty(O)$.

s が C^∞級であること, $M \to TM$, $p \mapsto (p, X_p)$ が C^∞級であること (Section 3) を用いる.)

$\omega^s : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ が定まった

Lemma 5.2.12 : $\omega^s \in \Lambda^1(M)$

(Hint : 示すこと (i) 線型性
(ii) 関数倍を保つ)

$\Phi : \Gamma(T^\vee M) \to \Lambda^1(M)$ が定まった.

$$s \mapsto \omega^s$$

Lemma 5.2.13 : $\Phi : \Gamma(T^\vee M) \to \Lambda^1(M)$ は $C^\infty(M)$加群準同型

(Hint: 示すこと (i) 線型性
(ii) 関数倍を保つ)

② $C^\infty(M)$加群準同型 $\varphi : \mathcal{A}^1(M) \to \Gamma(T^*M)$ を構成する.

$\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ を固定する. ($\omega : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$)

アイデア 各 $p \in M$ について $\omega_p \in T_p^*M$ を次の様に定めたい

$$\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \omega(X^v)$$

ただし $X^v \in \mathfrak{X}(M)$ は $(X^v)_p = v$ となるものとする.

Lemma 5.2.14 : 上記 $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$ は写像として well-defined で線型.

↑ 後で示す. ここでは認めて先にすすむ.

section $s^\omega : M \to T^\vee M,\ p \mapsto (p, \omega_p)$ が定まった.

Lemma 5.2.15 : $s^\omega \in \Gamma(T^\vee M)$ （s^ω は C^∞ 級）

これも後まわし

$\varphi : A^1(M) \to \Gamma(T^\vee M),\ \omega \mapsto s^\omega$ が定まった.

Lemma 5.2.16 : $\varphi : A^1(M) \to \Gamma(T^\vee M)$ は $C^\infty(M)$ 加群準同型

Hint : 示すこと (i) 線型性

(ii) 関数倍を保つ

③ $\varphi \circ \phi = \mathrm{id}_{P(T^\vee M)}$, $\phi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\Delta'(M)}$ を示す.

Lemma 5.2.17 : $\varphi \circ \phi = \mathrm{id}_{P(T^\vee M)}$, $\phi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\Delta'(M)}$

Hint : ① $\forall s \in P(T^\vee M)$ に対し.

示1 $s^{\omega^s} = s$

② $\forall \omega \in \Delta'(M)$ に対し.

示 $\omega^{s^\omega} = \omega$

② で後まわしにした Lemma 5.2.14, 5.2.15 を示す：

Lemma 5.2.14 (再掲)

各 $p \in M$ について $\omega_p \in T_p^\vee M$ を以下の様に定めたい

$$\omega_p : T_p M \to \mathbb{R},\quad v \mapsto \omega(X^v)$$

ただし $X^v \in \mathfrak{X}(M)$ は

$(X^v)_p = v$ となるものとする.

このとき

上記 $\omega_p : T_p M \to \mathbb{R}$ は写像として well-defined で

線型.

Proof of Lemma 5.2.14

well-definedness

示すこと

Ⓐ $\forall v \in T_pM,\ ^\exists X \in \mathfrak{X}(M)$ s.t. $X_p = v$

(Section 3でやった)

Ⓑ $X^1, X^2 \in \mathfrak{X}(M)$ が $X^1_p = X^2_p$ を満たすとする.

このとき $\omega(X^1) = \omega(X^2)$

(ここが難しい)

Ⓒ $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$ は線型

(簡単)

Ⓐ は Cor 3.3.4 より従う.

Ⓑ を示す:

ω の線型性より, 以下を示せば十分

Lemma 5.2.18

$\omega \in \Omega^1(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ with $X_p = 0$ とする.

このとき $(\underbrace{\omega(X)}_{\in C^\infty(M)})(p) = 0$

Proof of Lemma 5.2.18

Case 1 : $^\exists V$: p の開近傍 s.t. $X_q = 0$ $({}^\forall q \in V)$ の場合

(p のまわりで X がぴったりゼロ)

示 $(\omega(X))(p) = 0$

(p, V) の cut-off 関数 $b \in C_c(M)$ をとる.

(Section 2)

$\underbrace{(1-b)}_{\in}X = X$ に注意する.

$C_c(M)$

p のまわりでぴったりゼロ

V の外では常に 1

このとき

$$
\begin{aligned}
(\omega(X))(p) &= (\omega((1-b)X))(p) \\
&= ((1-b)\cdot\omega(X))(p) \\
&= \underbrace{(1-b)(p)}_{=0}\cdot(\omega(X)(p)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ωは関数倍を保つ.

Case 2 : 一般の場合 (" $X_p = 0$ ")

(示) $(\omega(X))(p) = 0$

$(O, U, u) \in A$ with $p \in O$ をとる.

$\xi^X_{u_i} : O \to \mathbb{R}$ $(i=1, \cdots, n)$ を

$$X_q = \sum_{i=1}^n \xi^X_{u_i}(q) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \qquad ({}^\forall q \in O)$$

となるように定めると, $\xi^X_{u_i} \in C^\infty(O)$ かつ $\xi^X_{u_i}(p) = 0$

(Section 3) $(\because X_p = 0)$

Thm 2.2.3, Thm.3.3.3 より p の開近傍 V であって

$$\mathrm{rest}^M_V\, C^\infty(M) \supset \mathrm{rest}^O_V\, C^\infty(O) \quad \text{in } C^\infty(V)$$

$$\mathrm{rest}^M_V\, \Gamma(TM) \supset \mathrm{rest}^O_V\, \Gamma(TO) \quad \text{in } \Gamma(TV) \cong \mathfrak{X}(V)$$

となるものがとれる.

特に 各 $i=1,\cdots,n$ について

$$\tilde{\xi}^X_{x_i} \in C^\infty(M), \quad \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}} \in \Gamma(TM) \cong \mathfrak{X}(M)$$

であって

$$\tilde{\xi}^X_{x_i}\Big|_V = \underbrace{\xi^X_{x_i}}_{\in C^\infty(O)}\Big|_V, \qquad \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\Big|_V = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}}_{\in \Gamma(TO) \cong \mathfrak{X}(O)}\Big|_V$$

となるものがとれる.

$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} : O \to TO,\ p \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \right)$

ここで $X' := \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi^X_{x_i}} \cdot \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}$, $X'' := X - X'$ in $\mathfrak{X}(M)$

とおく.

このとき $\begin{cases} X = X' + X'' \\ X|_V = X'|_V , \quad X''|_V = 0 \end{cases}$

よって $\widetilde{\xi^X_{x_i}}(p) = \xi^X_{x_i}(p) = 0$ $\quad (\because p \in V)$

Case 1 の議論から $(\omega(X''))(p)=0$ に注意すると、

$$
\begin{aligned}
(\omega(X))(p) &= (\omega(X'))(p)+(\omega(X''))(p) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi^X_{x_i}} \cdot \omega\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)\right)(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\widetilde{\xi^X_{x_i}}(p)}_{=0} \cdot \left(\omega\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)\right)(p) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(Lemma 5.2.8 の証明終わり)

Ⓐ, Ⓑ より $\omega : T_pM \to \mathbb{R},\ v \mapsto (\omega(X^v))(p)$ は well-defined.

Ⓒ を示す:

示すこと $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$ は線型

i.e. $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall v_1, v_2 \in T_pM,$

$$\omega_p(av_1 + bv_2) = a\,\omega_p(v_1) + b\,\omega_p(v_2)$$

以下略

(Hint: $X^{v_1}, X^{v_2} \in \mathfrak{X}(M)$ with $X^{v_1}_p = v_1,\ X^{v_2}_p = v_2$

に対して $(aX^{v_1} + bX^{v_2})_p = aX^{v_1}_p + bX^{v_2}_p = av_1 + bv_2$)

∎

Lemma 5.2.15 (再掲)

Section $s^{\omega} : M \to T^{\vee}M,\ p \mapsto (p, \omega_p)$

は C^{∞} 級

Proof of Lemma 5.2.15

示. $^{\forall}(O, U, u) \in \mathcal{A},\ ^{\forall}i = 1, \cdots, n,$

$$g^{s^{\omega}}_{u_i} \in C^{\infty}(O)$$

(Definition 5.2.7)

${}^{\forall}(O, U, \mathfrak{u}) \in \mathcal{A}$, ${}^{\forall}i = 1, \cdots, n$ をとる.

示. $y^{S\omega}_{\mathfrak{u}_i} \in C^{\infty}(O)$

以下を示せば T/P

示. ${}^{\forall}p \in O$, ${}^{\exists}V$: p の開近傍 in O s.t. $y^{S\omega}_{\mathfrak{u}_i}\big|_V \in C^{\infty}(V)$

${}^{\forall}p \in O$ をとる.

Thm 3.3.3 より p の開近傍 V in O であって

$\mathrm{rest}^M_V \underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}\\ \mathfrak{X}(M)}}{\Gamma(TM)} = \mathrm{rest}^O_V \underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}\\ \mathfrak{X}(O)}}{\Gamma(TO)}$ となるものがとれる.

特に $\widetilde{\dfrac{\partial}{\partial x_i}} \in \Gamma(TM) \cong \mathfrak{X}(M)$ であって

$$\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\Big|_V = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}}_{\substack{\cap \\ \Gamma(TO) \cong \mathfrak{X}(O)}}\Big|_V$$ となるものがとれる.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : O \to TO,\ p \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

以下を示せば十分

示 $$\underbrace{\omega\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)}_{\substack{\cap \\ C^\infty(M)}}\Big|_V = g^{S\omega}_{x_i}\Big|_V$$

$\forall q \in V$ をとる. $\left(\tilde{\dfrac{\partial}{\partial x_i}}\right)_q = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_q \in T_qM$ に注意すると

$$\left(\omega\left(\tilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)\right)(q) = \omega_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q\right)$$ (∵ ω_q の定義)

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} g^{s^\omega}_{x_j}(q)\,(dx_j)_q\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q\right)$$ (∵ s^ω と $g^{s^\omega}_{x_j}$ の定義)

$$= g^{s^\omega}_{x_i}(q)$$ (∵ $(dx_j)_q$ の定義)

□

Example 5.2.19 $f \in C^\infty(M)$ とする.

$df : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),\ X \mapsto Xf$ は 1-form であった

Q : $df \in \Gamma(T^\vee M)$ とみなすとどうなる?

A :

Prop 5.2.20 $df : M \to T^\vee M,\ p \mapsto (p, (df)_p)$ と書くと,

$(df)_p : T_pM \to \mathbb{R},\ v \mapsto v(f) \quad (p \in M)$

特に 各 $(O, U, x) \in \mathcal{A}$ について $g^{df}_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, \cdots, n)$

つまり $(df)_p = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot (dx_i)_p \quad (\forall p \in O)$

Proof of Prop 5.2.20

まず section

$s : M \to T^\vee M,\ p \mapsto (p, \alpha_p^s)$ を

各 $p \in M$ について $\alpha_p^s : T_pM \to \mathbb{R},\ v \mapsto v(f)$

として定める.

以下の Lemma より well-defined.

Lemma 5.2.21 : $\alpha_p^s \in T_pM$ (証明略)

以下を示せばよい

示　① 各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ について $y^s_{u_i} = \overset{\in C^\infty(O)}{\dfrac{\partial f}{\partial u_i}}$ $(i = 1, \cdots, n)$.　(特に $s \in \Gamma(T^*M)$)

Prop 5.2.20 について

② 各 $X \in \mathfrak{X}(M)$ について $\omega^s(X) : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto \alpha^s_p(X_p)$ とおくと

$$\omega^s = df : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$
$$X \mapsto Xf \quad .$$

① $^\forall(O, U, x) \in \mathcal{A}$ をとる.

示 $y^s_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$

i.e. $\alpha^s_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\,(dx_i)_p$ $(^\forall p \in O)$

$^\forall v \in T_pM$ をとる. $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ $(a_i \in \mathbb{R})$ とおく.

このとき $(dx_i)_p(v) = a_i$ に注意すると,

$$\alpha^s_p(v) := v(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left((dx_i)_p(v)\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\,(dx_i)_p\right)(v)$$

① 終わり

② 示 ${}^\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega^s(X) = Xf$

${}^\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, ${}^\forall p \in M$ を とる.

示 $(\omega^s(X))(p) = (Xf)(p)$

$$(\omega^s(X))(p) = \alpha^s_p(X_p) = X_p(f) = (Xf)(p)$$

X_p の定義

(Prop 3.2.6)

② 終わり

☒

Remark : "写像の微分" との整合性

$f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とみなす.

点 $p \in M$ における f の "全微分" は

$$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}, \quad v \mapsto v \circ f^* : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\left(\text{ただし } f^* : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(M),\ h \mapsto h \circ f \right)$$

と定義される.

前のページに出てきた

$$(df)_p : T_pM \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto v(f)$$

との関係を次のページで述べる.

各 $q \in \mathbb{R}$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_q : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\quad h \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{h(q+t) - h(q)}{t}$$

は 1次元空間 $T_q\mathbb{R}$ の基底をなす

（$\mathbb{R}$ の標準座標についての座標基底）

$p \in M$ について $\varphi_p : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} T_{f(p)}\mathbb{R},\quad a \mapsto a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{f(p)}$ とおく.

Prop 5.2.22 : $\varphi_p(v(f)) = v \circ f^*$ （証明は次ページ）

このProp より $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R},\ v \mapsto v \circ f^*$ と $T_pM \to \mathbb{R},\ v \mapsto v(f)$ は"同じ".

Proof of Prop 5.2.22 : $\forall h \in C^\infty(\mathbb{R})$ をとる.

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad (a_i \in \mathbb{R})$$ と書いておく.

このとき

$$(v \circ f^*)(h) = v(h \circ f)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (h \circ f)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \ \frac{\partial h}{\partial t}(f(p)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

常微分

(いろいろずるした書き方)

$$= \left(v(f) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{f(p)}\right)(h) \qquad \square$$

(もっとスッキリした証明求む)

Example 5.2.23

Q : $\forall \omega \in \Omega^1(M) \cong \Gamma(T^*M)$,

$\exists ? f \in C^\infty(M)$ s.t. $\omega = df$

A : M のトポロジーに依存する.

$\rightsquigarrow$ de Rham コホモロジー

次ページ以降で具体例を紹介する.

Case 1 : $M = \mathbb{R}$ の場合

可縮 (特に"穴"はない)

Prop 5.2.24 : $M = \mathbb{R}$ とする. このとき

$\forall \omega \in \Gamma(T^*M)$, $\exists f \in C^\infty(M)$ s.t. $\omega = df$

Proof of Prop 5.2.24

$\forall \omega \in \Gamma(T^*M)$ をとる. (示) $\exists f \in C^\infty(M)$ s.t. $\omega = df$

M は一枚の地図で覆える

$M = \mathbb{R}$ より $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \underset{t}{\underset{\parallel}{id_{\mathbb{R}}}}) \in \mathcal{A}$.

t と書く

特に $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ であって

$\omega_p = g(p) \cdot (dt)_p \quad (\forall p \in M = \mathbb{R})$ となるものがとれる.

$f : M = \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto \int_0^y g(x)\,dx$ とおく

"通常の意味"のリーマン積分

(示) $df = \omega$

$\forall p \in M = \mathbb{R},\ \forall v \in T_pM = T_p\mathbb{R}$ をとる.

(示) $(df)_p(v) = \omega_p(v)$

微積分の基本定理

$v = a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p \quad (a \in \mathbb{R})$ と書く. $(dt)_p(v) = a$ に注意すると

$(df)_p(v) = v(f) = a\frac{\partial f}{\partial t}(p) = a\,g(p) = (dt)_p(v)\cdot g(p)$

$= \left(g(p)(dt)_p\right)(v) = \omega_p(v)$ ∎

1次元ホモロジーが消えてない(穴有)

Case 2 : $M = S^1$ の場合

$S^1 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ とおく.

各 $p = (x, y)$ について

$T_p S^1 = \{ a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \mid ax + by = 0 \}$ とみなす.

$\omega \in \Gamma(T^* S^1)$ を以下のように定める.

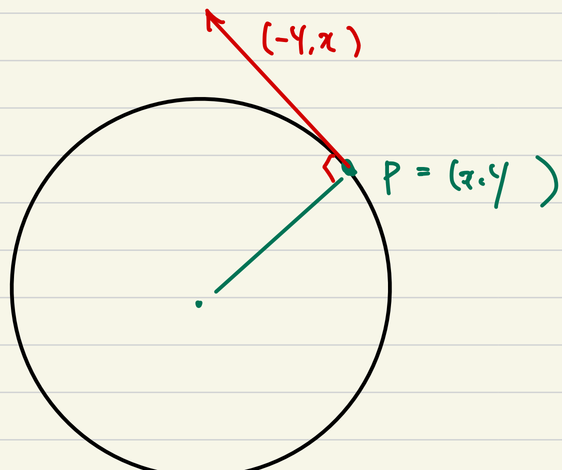
各 $p=(x,y)\in S^1$ について

反時計まわりの大きさを測定

$$\omega_p : T_pS^1 \to \mathbb{R}, \quad a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \longmapsto -ay+bx$$

$(ax+by=0)$ 　　((a,b) と $(-y,x)$ との内積)

と定める.



Prop 5.2.25

各 $p \in S^1$ について $\omega_p \in T_p^\vee M$.

また $\omega : M \to T^\vee M,\ p \mapsto (p, \omega_p)$ とおくと

$\omega \in \Gamma(T^\vee S^1)$ （証明略）

Theorem 5.2.26 : $\nexists f \in C^\infty(S^1)$ s.t. $df = \omega$

（証明は"多様体上の積分"を定義した後やる）

アイデア：$\omega = df$ なら $\int_{S^1} df = \int_{\partial S^1} f = \int_{\emptyset} f = 0$

ストークスの定理

$\int_{S^1} df = \int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} 1\, dx = 2\pi$

矛盾