Section 6 : 微分形式とその外積

微分形式の気持ち :

多様体の各点で，

接空間の交代形式を与える.

内容：

定義が簡単，抽象論に使いやすい

- 微分形式の代数的定義
- 微分形式の解析的定義

意味が理解しやすい．具体的な計算に使いやすい．

- 微分形式の外積

Section 6.1 : 微分形式の代数的定義

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n - mfd

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 : $C^\infty(M)$: M 上の C^∞ 級関数のなす可換 $\mathbb{R}$ 代数

積構造により $C^\infty(M)$ 加群とみなす

$\mathfrak{X}(M) \coloneqq \Gamma(TM)$

M 上のベクトル場のなす $C^\infty(M)$ 加群

Def. 6.1.1 : $\omega : \mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M)$ ← k回連續

が k次微分形式 on M

(または differential k-form)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\omega : \mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M)$ は

(i) 多重 $C^\infty(M)$ 加群準同型 (各成分で $C^\infty(M)$ 加群準同型)

かつ

(ii) 交代的 (成分の互換で -1 倍)

($C^\infty(M)$ 加群 $\mathfrak{X}(M)$ 上の"k次交代形式"のこと)

Def. 6.1.1 : $\omega : \mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M)$ が k-form on M
(再掲)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\omega : \mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M)$ は

(i) 多重 $C^\infty(M)$ 加群準同型
かつ
(ii) 交代的

Def 6.1.2 : $\Lambda^k(M) := \{ \omega : \mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M) \mid \omega$ は k-form $\}$

Prop 6.1.3 : $\Lambda^k(M)$ は $C^\infty(M)$ 加群

ただし，和，スカラー倍，関数倍の構造は自然に定める．

Section 6.2 : 微分形式の解析的定義

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n - mfd

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 : T_pM : $p \in M$ における M の接空間

$T_p^\vee M := (T_pM)^\vee$: T_pM の双対空間

$\bigwedge^k T_p^\vee M := \{ T_pM$ 上の k 次交代形式 $\}$: $T_p^\vee M$ の k 回外積

Def 6.2.1 :

$$\bigwedge^k T^\vee M := \{ (p, \alpha) \mid p \in M,\ \alpha \in \bigwedge^k T_p^\vee M \}$$

（余接束 $T^\vee M$ の k 回外積）　$\left(= \bigsqcup_{p \in M} \left(\bigwedge^k T_p^\vee M \right) \right)$

Remark: $\bigwedge^k T^\vee M$ には自然な C^∞ 級多様体構造が定まり,

M 上の"ベクトル束"の構造が定まることが知られている.

この講義では単なる集合とみなす.

Def 6.2.2 : 写像 $s: M \to \bigwedge^k T^\vee M$ が $\bigwedge^k T^\vee M$ の section

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall p \in M$, ${}^\exists! \alpha_p^s \in \bigwedge^k T_p^\vee M$ s.t. $s(p) = (p, \alpha_p^s)$

Mの各点で接空間上の交代形式を定める.

Def 6.2.3 : $\mathrm{Sect}(\bigwedge^k T^\vee M) := \{ s: M \to \bigwedge^k T^\vee M \mid \text{section} \}$

Prop 6.2.4 : $\mathrm{Sect}(\bigwedge^k T^\vee M)$ は $C^\infty(M)$ 加群

ただし, 和, スカラー倍, 関数倍は自然に定める.

C^∞-section of $\bigwedge^k T^\vee M$ をこれから定義する.

Def 6.2.5 : 各 $p \in M$, $(O, U, x) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ について
(cf. Thm 4.3.11)

T_pM の座標基底 $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_p\}_{i=1,\dots,n}$ に対し,

$T_p^\vee M$ の双対基底を $\{(dx_i)_p\}_{i=1,\dots,n}$ と書く.

このとき 各 $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \binom{[n]}{k} := \{\{1,\dots,n\}$ の k 点 subsets$\}$
$(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$

に対して $(\bigwedge^I dx)_p := (dx_{i_1})_p \wedge (dx_{i_2})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p$

とおくと, $\{(\bigwedge^I dx)_p \mid I \in \binom{[n]}{k}\}$ は $\bigwedge^k T_p^\vee M$ の基底.

Def 6.2.6 (section の局所表示)

$s \in \mathrm{Sect}(\bigwedge^k T^\vee M)$, $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ とする.

このとき

$$y^s_{(u,I)} : O \to \mathbb{R} \quad \left(I \in \binom{[n]}{k} \right)$$ を

$$\alpha^s_p = \sum_I y^s_{(u,I)}(p) \cdot (\bigwedge^I du)_p \quad (\forall p \in O)$$

が成り立つように定める (一意に定まる).

Def 6.2.7 $s \in \mathrm{Sect}(\bigwedge^k T^\vee M)$ が C^∞ 級

$\Longleftrightarrow$ ${}^\forall (O, U, \varphi) \in \mathcal{A}$, ${}^\forall I \in \binom{[n]}{k}$ $\quad j^s_{(\varphi, I)} \in C^\infty(O)$

Def 6.2.8

$\Gamma(\bigwedge^k T^\vee M) := \{ s \in \mathrm{Sect}(\bigwedge^k T^\vee M) \mid C^\infty \text{級} \}$

Prop 6.2.9 $\Gamma(\bigwedge^k T^\vee M)$ は $\mathrm{Sect}(\bigwedge^k T^\vee M)$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群

Prop 6.2.10 $k=0$ のとき

各 $p \in M$ について $\overset{0}{\wedge} T_p^\vee M = \{\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$ 線型$\} \cong \mathbb{R}$

とみなすと、 $\overset{0}{\wedge} T^\vee M \cong M \times \mathbb{R}$ となり

$$\mathrm{Sect}(\overset{0}{\wedge} T^\vee M) \cong \{s : M \to \mathbb{R}\}$$

$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$$\Gamma(\overset{0}{\wedge} T^\vee M) \cong C^\infty(M)$$

となる.

Remark : $k=1$ のとき

各 $p \in M$ について $\overset{1}{\bigwedge} T_p^\vee M = T_p^\vee M$ に注意すると,

$$\overset{1}{\bigwedge} T^\vee M = T^\vee M.$$

特に $\Gamma(\overset{1}{\bigwedge} T^\vee M) = \Gamma(T^\vee M)$.

Prop 6.2.11 $k \gneqq n$ のとき $\Gamma(\overset{k}{\bigwedge} T^\vee M) = 0$

$\left(\because \text{Cor } 4.2.6 \text{ より } \overset{k}{\bigwedge} T_p^\vee M = 0 \right)$

Theorem 6.2 12 以下の対応 Φ, φ により $C^\infty(M)$ 加群として

Thm 5.2.11 の一般化

$$\Lambda^k(M) \text{ と } \Gamma(\textstyle\bigwedge^k T^\vee M) \text{ は同型}$$

代数的　解析的

$\Phi : \Gamma(\bigwedge^k T^\vee M) \to \Lambda^k(M),\ s \mapsto \omega^s$, ただし,

$$\omega^s : \mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M),\ (X_1, \cdots, X_k) \mapsto \omega^s(X_1, \cdots, X_k) : M \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \alpha^s_p((X_1)_p, \cdots, (X_k)_p)$$

$\varphi : \Lambda^k(M) \to \Gamma(\bigwedge^k T^\vee M),\ \omega \mapsto s^\omega$, ただし

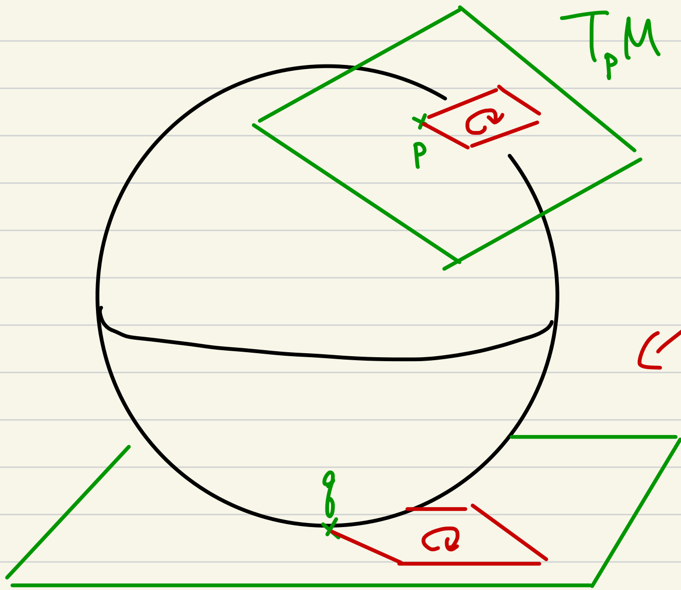
$$s^\omega : M \to \textstyle\bigwedge^k T^\vee M,\ p \mapsto (p, \omega_p),$$

$$\omega_p : (T_pM)^k \to \mathbb{R},\ (v_1, \cdots, v_k) \mapsto (\omega(X_1, \cdots, X_k))(p)$$

$\left(X_1, \cdots X_k \in \mathfrak{X}(M) \text{ with } (X_i)_p = v_i \text{ とする} \right)$

k-form の気持ち：

Mの上の"向き付けされた微小k次元平行四辺形"に実数を対応させるもの



これらにそれぞれ実数を対応させたい

Ex 6.2.1} $S^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2=1 \right\}$ とする.

各 $p \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ について

T_pS^2 を "$\mathbb{R}^3$ における p の直交補空間" と同一視する.

ここで T_pS^2 上の 2次交代形式 $(\omega_{Haar})_p$ を

縦ベクトル3本を並べる.

$$(\omega_{Haar})_p(v, w) = \det\begin{pmatrix} p & v & w \end{pmatrix}$$

(v, w : p と直交する $\mathbb{R}^3$ のベクトル)

$\rotatebox{90}{$\in$}$ T_pS^2

このとき

$$\begin{aligned} \omega_{Haar} : S^2 &\to \textstyle\bigwedge^2 T^\vee S^2 \\ p &\mapsto (\omega_{Haar})_p \end{aligned}$$

は $\Gamma(\bigwedge^2 T^\vee M)$ の元

(つまり 2-form)

Section 6.3 : 微分形式の外積

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd

記号 : $\Omega^k(M) := \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$:

M 上の k-form 全体のなす $C^\infty(M)$ 加群

$(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

Def 6.3.1 $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\omega_1 \in \Gamma(\bigwedge^k T^\vee M)$, $\omega_2 \in \Gamma(\bigwedge^l T^\vee M)$ とする.

($\omega_1 : M \to \bigwedge^k T^\vee M,\ p \mapsto (p, (\omega_1)_p)$ のように書く)

このとき ω_1 と ω_2 の外積 $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Gamma(\bigwedge^{k+l} T^\vee M)$ を

$$\omega_1 \wedge \omega_2 : M \to \bigwedge^{k+l} T^\vee M,\ p \mapsto (p, (\omega_1)_p \wedge (\omega_2)_p)$$

と定める.

各点で交代形式の外積 (cf. Def. 4.3.1) ですよね.

C^∞性が非自明

Prop 6.3.2 : 上の定義は well-defined.

Prop 6.3.2 の証明の Lemma

Lemma 6.3.3: Def 6.3.1 の設定で $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ を fix.

このとき各 $I \in \binom{[n]}{k+l}$ について

次ページで定義

$$g^{\omega_1 \wedge \omega_2}_{(u, I)} : O \to \mathbb{R},\ p \mapsto \sum_{\substack{I_1 \in \binom{[n]}{k},\ I_2 \in \binom{[n]}{l} \\ \text{with } I_1 \cap I_2 = \emptyset,\ I_1 \cup I_2 = I}} \operatorname{sgn}(I_1, I_2)\, g^{\omega_1}_{(u, I_1)}(p) \cdot g^{\omega_2}_{(u, I_2)}(p)$$

とおくと

$$(\omega_1)_p \wedge (\omega_2)_p = \sum_{I \in \binom{[n]}{k+l}} g^{\omega_1 \wedge \omega_2}_{(u, I)}(p) \left(\bigwedge^{I} du\right)_p \quad (\forall p \in O)$$

てこてごし ,　$I_1 = \{j_1^1, \cdots, j_k^1\}$　$(j_1^1 < \cdots < j_l^1)$

$I_2 = \{j_1^2, \cdots, j_l^2\}$　$(j_1^2 < \cdots < j_l^2)$　with $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$

について

$I_1 \cup I_2 = \{i_1, \cdots, i_{k+l}\}$　$(i_1 < \cdots < i_{k+l})$ と書いておく

$$\mathrm{sgn}(I_1, I_2) := \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & & & & i_{k+l} \\ j_1^1 & \cdots & j_k^1, & j_1^2 & \cdots & j_l^2 \end{pmatrix}$$ とする.

($I_1 \cup I_2$ を昇順に並びかえるときの符号)

Prop 6.3.2 は Lemma 6.3.3 より従う.

Prop 6.3.4 : $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

$\omega_1 \in \Gamma(\bigwedge^k T^\vee M) \cong \Lambda^k(M)$

$\omega_2 \in \Gamma(\bigwedge^l T^\vee M) \cong \Lambda^l(M)$ とし,

$\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Gamma(\bigwedge^{k+l} T^\vee M) \cong \Lambda^{k+l}(M)$ を考える.

このとき $\Lambda^{k+l}(M)$ の元として $\omega_1 \wedge \omega_2$ を表すと

$$\omega_1 \wedge \omega_2 : \mathfrak{X}(M)^{k+l} \to C^\infty(M)$$

$$(X_1, \cdots, X_{k+l}) \mapsto \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \underbrace{\omega_1(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(k)})}_{\in C^\infty(M)}\, \underbrace{\omega_2(X_{\sigma(k+1)}, \cdots, X_{\sigma(k+l)})}_{\in C^\infty(M)}$$

(Hint $\Lambda^k(M)$ と $\Gamma(\bigwedge^k T^\vee M)$ の対応に戻る)

Prop 6.3.5 : $\displaystyle\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(M) \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(\Lambda^k T^*M)$

は外積により結合的 $\mathbb{R}$ 代数となる.

Hint : 示 ① 外積は双線型

② 外積は結合的

(Prop 4.3.7
Prop 4.3.8 から従う)