Section 7：微分形式の外微分

Recall：$f \in C^\infty(M) \cong \Gamma(\bigwedge^0 T^*M)$　　0-form

(Ex 5.1.4)　について　　を"外微分"して

$df : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),\ X \mapsto Xf$　　1-form を得た

"外微分"

は 1-form

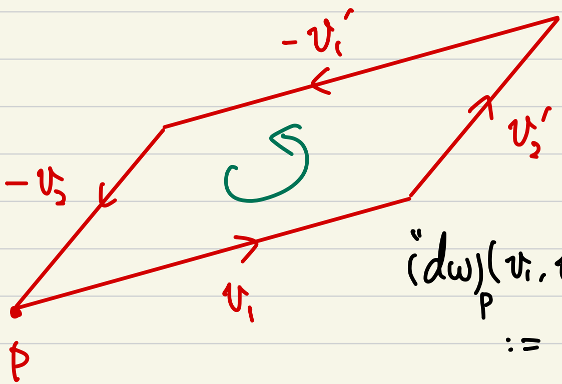
やる事：上の話の一般化：

k-form を"外微分"して (k+1)-form を得る

気持ち： ω を 1-form とする. (接ベクトルを実数に変換する)

(k=1 のとき)

2-form $d\omega$ を作りたい (微小平行四辺形を実数に変換する)



"$(d\omega)_p(v_1, v_2)$

$$:= \omega_p(v_1) + \underbrace{\omega_p(v_2')}_{?} + \underbrace{\omega_p(-v_1')}_{?} + \omega_p(-v_2)$$" と定めたい

難点） "v_1'" は "v_1 を v_2 に沿って平行移動したもの"

として定義したいところであるが、

"平行移動" は自然には定義できない。

Thm 6.2.12

アイデア： ベクトル場を考える！（代数的定義と解析的定義の対応を使う）

内容

- 外微分の代数的定義
- 外微分の解析的定義
- 微分形式と外微分のなす鎖複体
- 外積と外微分

Section 7.1 : 外微分の代数的定義

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 :

$\mathcal{A}^k(M) := \{ \omega : \mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M) \mid k\text{-form} \}$

（各変数 $C^\infty(M)$ 加群準同型かつ交代的）

Def 7.1.1 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

$d = d_k : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$, $\omega \mapsto d\omega$ を

$d\omega : \mathfrak{X}(M)^{k+1} \to C^\infty(M)$

$$(X_1, \cdots, X_{k+1}) \mapsto \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} X_s\, \omega(X_1, \cdots, \hat{X_s}, \cdots, X_{k+1})$$

X_s を抜く

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X_i}, \cdots, \hat{X_j}, \cdots, X_{k+1})$$

ベクトル場のブラケット (Section 3)

X_i X_j を抜く

Prop 7.1.2 : 上記 d は well-defined かつ線型.

$d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$

は well-defined

Prop 7.1.2 の示すこと

① 上で作った "$d\omega$" が $k+1$ form を定める.

ⓘ "$d\omega$" が 引数 $C^\infty(M)$ 加群準同型

ⓘⓘ "$d\omega$" が 交代的 ←

(ややこしいだけ)

② d の 線型性 (簡単)

① ⓘ のみここでは紹介する

簡単のため $k=1$ とする (一般の場合もほぼ同じ)

$\forall \omega \in \mathcal{A}^1(M)$ をとる.

㊟ $d\omega : \mathfrak{X}(M)^2 \to C^\infty(M)$ は 双 $C^\infty(M)$ 加群準同型

i.e. (a) 第1成分について $C^\infty(M)$ 加群準同型

(b) 第2成分について $C^\infty(M)$ 加群準同型

以下では (a) のみ示す (（b）も同様に示される)

$\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$ をとる.

㊟ $(d\omega)(\_, Y) : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),\ X \mapsto (d\omega)(X, Y)$

は $C^\infty(M)$ 加群準同型 i.e. (イ) 線型

(ロ) 関数倍を保つ

以下 (イ) は省略, (ロ) を示す.

(かんたん)

$\forall f \in C^\infty(M),\ \forall X \in \mathfrak{X}(M)$ とする.

示) $(d\omega)(fX, Y) = f\cdot(d\omega)(X,Y)$

∵ Lemma 7.1.3

(∵次ページ)

左辺 $= (fX)(\omega(Y)) - Y\omega(fX) - \omega([fX,Y])$

$= f\cdot(X\omega(Y)) - Y(f\cdot\omega(X)) - \omega(f[X,Y] - (Yf)\cdot X)$

$= f\cdot(X\omega(Y)) - (Yf)\cdot\omega(X) - f\cdot(Y\omega(X))$

$- f\omega([X,Y]) + (Yf)\cdot\omega(X)$

$= f(X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]))$

$= f\, d\omega(X,Y) =$ 右辺 ■

Section 3 でやるべきだったけど忘れてました…

Lemma 7.1.3 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ について

$$[fX, Y] = \underbrace{f}_{\in C^\infty(M)} \cdot \underbrace{[X, Y]}_{\in \mathfrak{X}(M)} - \underbrace{(Yf)}_{\in C^\infty(M)} \cdot \underbrace{X}_{\in \mathfrak{X}(M)}$$

$$[X, fY] = f \cdot [X, Y] + (Xf) \cdot Y$$

(Hint: 定義に戻る)

Example 7.1.3　$k=1$ の場合

各 $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ に対して,

$$d\omega : \mathfrak{X}(M)^2 \to C^\infty(M)$$

$$(X_1, X_2) \mapsto X_1\omega(X_2) - X_2\omega(X_1) - \omega([X_1, X_2])$$

Remark : $k=0$ の場合 : $\mathcal{A}^0(M) \cong C^\infty(M)$ とみなし,

各 $f \in C^\infty(M)$ について　$df : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$

$X \mapsto Xf$

(Example 5.1.4)

Section 7.2：外微分の解析的定義

設定：$M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd.

└ $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号：$\Gamma(\overset{k}{\wedge} T^{\vee}M) := \{ \overset{k}{\wedge} T^{\vee}M$ の C^{∞}-section on $M \}$

└ $\cong \Omega^{k}(M)$

$\omega \in \mathcal{A}^k(M) \cong \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ を固定する.

$p \in M$, $v_1, \cdots, v_k, v_{k+1} \in T_pM$ とする

$(d\omega)_p(v_1, \cdots, v_{k+1}) \in \mathbb{R}$ を決定したい.

$X_1, \cdots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$\begin{cases} (X_i)_p = v_i & (i = 1, \cdots, k+1) \\ [X_i, X_j]_p = 0 & (i, j = 1, \cdots, k+1) \end{cases}$$

を満たすものとする.

(Cor 3.3.4 より
このようなものが存在する)

Theorem 7.2.1：上の設定で，

$$(d\omega)_p(v_1,\dots,v_{k+1}) = \sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s+1}\, v_s\Big(\underbrace{\omega(X_1,\dots,\hat{X_s},\dots,X_{k+1})}_{\in C^\infty(M)}\Big)$$

$\hat{}$：X_s を抜く

$\in C^\infty(M)$

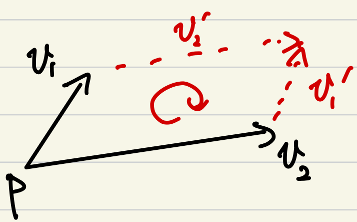
（$\omega \in A^k(M)$ とみなした）

（これを外微分の定義と思ってもよい）

Example 7.2.2：$k=1$ のとき

$$(d\omega)_p(v_1,v_2) = v_1\,\omega(X_2) - v_2\,\omega(X_1)$$

→ 気持ち



$$\omega(v_2') - \omega(v_2) - (\omega(v_1') - \omega(v_1))$$

$$= \omega(v_1) + \omega(v_2') + \omega(-v_1') + \omega(-v_2)$$

（一周する）

Proof of Thm 7.2.1 :

$$\overset{\substack{(LHS)\\ \shortparallel}}{\underbrace{(d\omega)_p}_{\substack{\cap \\ \Gamma(\Lambda^{k+1}T^\vee M)}}(v_1, \cdots, v_{k+1})} = ((\underbrace{d\omega}_{\in\, \Gamma(\Lambda^{k+1}T^\vee M)})(X_1, \cdots, X_{k+1}))(p) \quad (\because \text{Thm } 6.2.12)$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s+1}X_s\,\omega(X_1, \cdots \overset{\vee}{s} \cdots X_{k+1}) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1 \cdots \overset{\vee}{i} \cdots \overset{\vee}{j} \cdots X_{k+1})\right)(p)$$

$(\because$ Def 7.1.1 $)$

$$= \sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s+1}v_s(\omega(X_1, \cdots \overset{\vee}{s} \cdots, X_{k+1}))$$

$$+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega_p(\underbrace{[X_i, X_j]_p}_{=0}, v_1, \cdots \overset{\vee}{i} \cdots \overset{\vee}{j} \cdots, v_{k+1})$$

$(\because$ Thm 6.2.12 $)$

$$= \sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s+1}v_s(\omega(X_1, \cdots, \hat{s}, \cdots, X_{k+1})) = (RHS)$$

∎

Cor 7.2.3 外微分は局所的

i.e. $\forall \omega \in \Lambda^k(M)$, $\forall O$: open in M,

$$d(\omega|_O) = (d\omega)|_O$$

O上の外微分

section とみれば制限が定まる.

(Hint 積分は局所的)

外微分を局所座標上で記述する.

Theorem 7.2.4: $\omega \in \Omega^k(M) \cong \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ とする.

$d\omega \in \Omega^k(M) \cong \Gamma(\bigwedge^{k+1} T^*M)$ を section とみなしたとき

$\forall (O, U, x) \in A$, $\forall I \in \binom{[n]}{k+1}$ (ただし $\binom{[n]}{k+1} := \emptyset$ if $k+1 > n$)

$I = \{i_1, \cdots, i_{k+1}\}$ $(i_1 < \cdots < i_{k+1})$

$$f^{d\omega}_{(x, I)} : O \to \mathbb{R},\ p \mapsto \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial f^{\omega}_{(x, I \setminus \{i_s\})}}{\partial x_{i_s}}(p)$$

Example 7.2.5 : $k=0$ のとき : $\Delta^0(M) \cong \Gamma(\wedge^0 T^*M) \cong C^\infty(M)$ とみなす.

$f \in C^\infty(M)$, $(O, U, x) \in \mathcal{A}$ について

$$(df)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p)\,(dx_i)_p \qquad (\forall p \in O)$$

$$\left(y^f_{(x,O)} = f|_O \text{ とみる} \right)$$

Example 7.2.6 $k=1$ のとき：

$\omega \in \Lambda^1(M) \cong \Gamma(T^*M)$, $(O, U, x) \in A$ について,

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} g^{\omega}_{(x,\{i\})}(p) \cdot (dx_i)_p \quad (\forall p \in O)$$

と書ける.

計算 (Section 7.4)

このとき

$$(d\omega)_p = \sum_{i_1<i_2} \left(\frac{\partial g^{\omega}_{(x,\{i_2\})}}{\partial x_{i_1}}(p) - \frac{\partial g^{\omega}_{(x,\{i_1\})}}{\partial x_{i_2}}(p) \right) \left(\bigwedge^{\{i_1,i_2\}} dx \right)_p$$

$$\left(= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g^{\omega}_{(x,\{i\})}}{\partial x_j}(p)\, (dx_j)_p \wedge (dx_i)_p \right)$$

Proof of Thm 7.2.4

$\forall (O, U, x) \in A$, $\forall I = \{i_1, \cdots, i_{k+1}\} \in \binom{[n]}{k+1}$ をとる。
$(i_1 < \cdots < i_{k+1})$

$\forall p \in O$

示 $\displaystyle \mathcal{J}^{d\omega}_{(x, I)}(p) = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial \mathcal{J}^{\omega}_{(x, I \setminus \{i_s\})}}{\partial x_{i_s}}(p)$

いま $\displaystyle \mathcal{J}^{d\omega}_{(x, I)}(p) = (d\omega)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\right)_p \right)$

に注意する。

O 上のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathfrak{X}(O)$ を

Thm 3.3.3 (ベクトル場の延長) により p のまわりの様子を変えずに

M 上のベクトル場に拡張した (一意ではない) ものを

$$\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_1}}, \cdots, \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_n}} \in \mathfrak{X}(M) \quad \text{とする.}$$

$$\left({}^{\exists} V : p \text{ の開近傍 in } O \text{ s.t. } \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\Big|_V = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_V \ ({}^{\forall} i) \right)$$

このとき

$$\begin{cases} \left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \\ \left[\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right]_p = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]_p = 0 \end{cases}$$

偏微分の交換可能性

従って Thm 7.2.1 より

$$\eta^{d\omega}_{(u,I)}(p) = (d\omega)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_{k+1}}}\right)_p\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_s}}\right)_p \left(\omega\left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u_{i_1}}, \underset{\hat{s}}{\cdots} \frac{\tilde{\partial}}{\partial u_{i_{k+1}}}\right)\right) = ☆$$

ここで $\forall q \in V$ について

$$\left(\omega\left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial u_{i_1}}, \underset{\hat{s}}{\cdots}, \frac{\tilde{\partial}}{\partial u_{i_{k+1}}}\right)\right)(q) = \omega_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}\right)_q, \underset{\hat{s}}{\cdots}, \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_{k+1}}}\right)_q\right)$$

$$= \eta^{\omega}_{(u, \{i_1, \underset{\hat{s}}{\cdots}, i_{k+1}\})}(q)$$

=(より) ☆ $$= \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_s}}\right)_p y^{\omega}_{(u,\, I \setminus \{i_s\})}$$

$$= \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial y^{\omega}_{(u,\, I \setminus \{i_s\})}}{\partial u_{i_s}}(p) \qquad \blacksquare$$

Cor 7.2.7 : $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ を fix.

各 $i = 1, \cdots, n$ について $u_i : O \to \mathbb{R},\ p \mapsto u(p)$ の第 i 成分 とすると

$du_i : O \to T^*O,\ p \mapsto (p, (du_i)_p)$

の $\Gamma(T^*O)$

$(du_i)_p$ ← 座標基底の双対

Section 7.3 微分形式と外微分のなす鎖複体

設定：$M = (M, \mathcal{A})$ ： n-mfd.

記号：$d = d_k : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$ ：外微分

$(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

Theorem 7.3.1：$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\quad d_{k+1} \circ d_k = 0.$

← "境界に境界なし"

$$\left(\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}^k(M) & \xrightarrow{d_k} & \mathcal{A}^{k+1}(M) & \xrightarrow{d_{k+1}} & \mathcal{A}^{k+2}(M) \\ \cong & & \cong & & \cong \\ \Gamma(\bigwedge^k T^\vee M) & & \Gamma(\bigwedge^{k+1} T^\vee M) & & \Gamma(\bigwedge^{k+2} T^\vee M) \end{array} \right)$$

Cor 7.3.2 : $H^k_{dR}(M) := \mathrm{Ker}\, d_k / \mathrm{Im}\, d_{k-1}$ は well-defined

$(\mathrm{Im}\, d_{k-1} \subset \mathrm{Ker}\, d_k)$

k 次 de Rham コホモロジー

メモ: Thm 7.2.4 を使うと簡単)

積分論をやってから再度紹介する.

∃

Thm 7.3.1 の証明の準備 :

Cor 3.3.4 の強い版

(証明はまったく同じ)

(うっかりしていた…)

Prop 7.3.3 : $p \in M$ とし, $v_1, \cdots, v_k \in T_pM$ とする.

このとき $X_1, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ であって

$$\begin{cases} (X_i)_p = v_i \quad (\forall i = 1, \cdots, k) \quad \text{かつ} \\ \exists V : p \text{ の開近傍 s.t. } [X_i, X_j]|_V = 0 \quad (\forall i, j = 1, \cdots, k) \end{cases}$$

となるものが存在する.

Proof of 7.3.1 : $\forall \omega \in \Gamma(\overset{k}{\wedge} T^{\vee}M) \simeq \Lambda^k(M)$

$\forall p \in M$, $\forall v_1, \cdots, v_{k+2} \in T_pM$ とする.

示 $(d_{k+1}(d_k\omega))_p(v_1, \cdots, v_{k+2}) = 0$.

$X_1, \cdots, X_{k+2} \in \mathfrak{X}(M)$ を
$$\begin{cases} (X_i)_p = v_i & (i=1,\cdots,k+2) \\ \exists V : p\text{の開近傍 s.t. } [X_i, X_j]|_V = 0 & (i,j=1,\cdots,k+2) \end{cases}$$

となるようにとる. （Prop 7.3.3 より存在が保障される）

このとき Thm 7.2.1 より

$$(d_{k+1}(d_k\omega))_p(v_1, \cdots, v_{k+2})$$

$$= \sum_{s=1}^{k+2} (-1)^{s+1} v_s \left((d_k\omega)(X_1, \cdots \hat{s} \cdots, X_{k+2}) \right) = ☆$$

ここで d_k の定義と $[X_i, X_j]|_V = 0$ より

$$(d_k\omega)(X_1, \cdots \hat{s} \cdots, X_{k+2})|_V = \left(\sum_{s'=1}^{s-1} (-1)^{s'+1} X_{s'}\, \omega(X_1, \cdots \overset{\wedge}{s'} \cdots \hat{s} \cdots X_{k+2}) + \sum_{s'=s+1}^{k+2} (-1)^{s'} X_{s'}\, \omega(X_1, \cdots \hat{s} \cdots \overset{\wedge}{s'} \cdots X_{k+2}) \right)\Bigg|_V$$

従って

$$\bigstar = \sum_{s=1}^{k+2} (-1)^{s+1} v_s \Big((d_k \omega)(X_1, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, X_{k+2}) \Big)$$

$$= \sum_{s=1}^{k+2} (-1)^{s+1} v_s \left(\sum_{s'=1}^{s-1} (-1)^{s'+1} X_{s'}\, \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_{s'}, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, X_{k+2}) + \sum_{s'=s+1}^{k+2} (-1)^{s'} X_{s'}\, \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, \hat{X}_{s'}, \ldots, X_{k+2}) \right)$$

$$= \sum_{s'<s} (-1)^{s+s'} v_s X_{s'}\, \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_{s'}, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, X_{k+2})$$

$$+ \sum_{s<s'} (-1)^{s+s'+1} v_s X_{s'}\, \omega(X_1, \ldots, \hat{X}_s, \ldots, \hat{X}_{s'}, \ldots, X_{k+2})$$

$$= \sum_{s'<s} (-1)^{s+s'} \left(v_s X_{s'} \omega(X_1, \ldots \hat{s'} \ldots \hat{s} \ldots X_{k+2}) - v_{s'} X_s \omega(X_1, \ldots \hat{s'} \ldots \hat{s} \ldots X_{k+2}) \right)$$

$$= \sum_{s'<s} (-1)^{s+s'} \left((X_s X_{s'} \omega(X_1, \ldots, X_{k+2}))(p) - (X_{s'} X_s \omega(X_1, \ldots, X_{k+2}))(p) \right)$$

$$= \sum_{s'<s} (-1)^{s+s'} \left(\underbrace{[X_s, X_{s'}]}_{=0}{}_p \, \omega(X_1, \ldots, X_{k+2}) \right)$$

$$= 0$$

$\blacksquare$

Section 7.4 外積と外微分

設定　$M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd

記号　$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \Omega^k(M) \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(\Lambda^k T^*M)$: 外積代数 on M

Theorem 7.4.1 : $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\omega_1 \in \Omega^k(M)$, $\omega_2 \in \Omega^l(M)$ とする.

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$$

(証明は後で)

Cor 7.4.2: $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Lambda^k(M)$ とする.

$$d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f\, d\omega$$

(Hint: f を 0-form とみなすと, $f\omega = f \wedge \omega$.)

Example 7.4.3 : $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ とする.

(Thm 7.2.4 の再計算) $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ を fix

このとき $\omega|_O = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \underbrace{\mathcal{J}^{\omega}_{(u,I)}}_{\in C^\infty(O)} \cdot \underbrace{\overset{I}{\wedge} du}_{\in P(\overset{k}{\wedge} T^\vee O)}$ と書ける.

$\left(ただし \left(\begin{array}{l} \overset{I}{\wedge} du : O \to \overset{k}{\wedge} T^\vee O \\ p \mapsto (p, (\overset{I}{\wedge} du)_p) \end{array} \right) \right)$

Cor 7.2.3 と Thm 7.4.1, Cor 7.4.2 より

$$(d\omega)|_O = d(\omega|_O) = \sum_I d\left(\mathcal{J}^{\omega}_{(u,I)} \cdot (\overset{I}{\wedge} du)\right)$$

$$= \sum_I \left(dg^{\omega}_{(u,I)} \wedge \left(\bigwedge^I du\right) + g^{\omega}_{(u,I)} \cdot d\left(\bigwedge^I du\right) \right)$$

$$= \sum_I \left(\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g^{\omega}_{(u,I)}}{\partial u_j} du_j \right) \wedge \left(\bigwedge^I du\right) + g^{\omega}_{(u,I)} \cdot d\left(\bigwedge^I du\right) \right)$$

$$= (*)$$

ここで Cor 7.2.7, Thm 7.3.1, 7.4.1 より

$$d\left(\bigwedge^I du\right) = d\left(du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_k}\right) \quad \left(\begin{array}{l} I = \{i_1 \cdots i_k\} \\ (i_1 < \cdots < i_k) \end{array} \right)$$

$$= \sum_{l=1}^{k} (-1)^l du_{i_1} \wedge \cdots \wedge \underbrace{ddu_{i_l}}_{=0} \wedge \cdots du_{i_k}$$

$$= 0$$

従って

$$\# = \sum_{I} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^{\omega}_{(x,I)}}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge \left(\bigwedge^{I} dx \right)$$

$$= \sum_{I} \sum_{j \notin I} \frac{\partial y^{\omega}_{(x,I)}}{\partial x_j} dx_j \wedge \left(\bigwedge^{I} dx \right)$$

これは Thm 7.2.4 と同じものになる.

Thm 7.4.1 の証明の準備：

Lemma 7.4.4 ： $\omega \in A^k(M)$, $p \in M$, $v_1, \cdots, v_{k+1} \in T_pM$ について

$X_1, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ を $\begin{cases} (X_i)_p = v_i \\ [X_i, X_j]_p = 0 \end{cases}$ とすると，

$$(d\omega)_p(v_1, \cdots, v_{k+1}) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)}\left(\omega\left(X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(k+1)}\right)\right)$$

対称群の言葉で Thm 7.2.1 を書いた

Proof of Lemma 7.4.4 :

$$(d\omega)_p(v_1,\dots,v_{k+1}) = \sum_{s=1}^{k+1}(-1)^s v_s\,\omega(X_1,\dots,\hat{X}_s,\dots,X_{k+1}) \quad (\because \text{Thm } 7.2.1)$$

$$= \sum_{s=1}^{k+1}(-1)^s v_s\left(\frac{1}{k!}\sum_{\substack{\tau\in\mathfrak{S}_{k+1}\\ \tau(s)=s}}\underbrace{\operatorname{sgn}(\tau)\,\omega(X_{\tau(1)},\dots,\hat{X}_{\tau(s)},\dots,X_{\tau(k+1)})}_{=\ \omega(X_1,\dots,\hat{X}_s,\dots,X_{k+1})\ (\because \text{交代性})}\right) \qquad X_{\tau(s)}=X_s$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{s=1}^{k+1}\sum_{\substack{\tau\in\mathfrak{S}_{k+1}\\ \tau(s)=s}}(-1)^s\operatorname{sgn}(\tau)\,v_s\big(\omega(X_{\tau(1)},\dots,\hat{X}_s,\dots,X_{\tau(k+1)})\big) \qquad \hat{X}_s = X_{\tau(s)}$$

$$\sigma = \underbrace{(\tau(1),\dots,\underset{s}{\underset{\|}{\tau(s)}})}_{\text{巡回置換}}\circ\tau$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+1}}\operatorname{sgn}(\sigma)\,v_{\sigma(1)}\,\omega(X_{\sigma(2)},\dots,X_{\sigma(k+1)})$$

∎

Proof of Thm 7.4.1

$\forall p \in M$, $\forall v_1, \cdots, v_{k+l+1} \in T_pM$ をとる.

示 $(d(\omega_1 \wedge \omega_2))_p(v_1, \cdots, v_{k+l+1})$

$$= (d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2)_p(v_1, \cdots, v_{k+l+1})$$

$X_1, \cdots, X_{k+l+1} \in \mathfrak{X}(M)$ で $\begin{cases} (X_i)_p = v_i & (i = 1, \cdots, k+l+1) \\ [X_i, X_j]_p = 0 & (i, j = 1, \cdots, k+l+1) \end{cases}$

を満たすものをとる. (Cor 3.3.4)

ここで

$$(d(\omega_1 \wedge \omega_2))_p(v_1, \cdots, v_{k+l+1})$$

$$= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, v_{\sigma(1)} \left(\omega_1 \wedge \omega_2 (X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(k+l+1)}) \right)$$

$$= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)$$

$$v_{\sigma(1)} \left(\frac{1}{k!\,l!} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_{k+l+1} \\ \tau(1)=1}} \mathrm{sgn}(\tau)\, \omega_1(X_{\tau\sigma(2)}, \cdots, X_{\tau\sigma(k+1)})\, \omega_2(X_{\tau\sigma(k+2)}, \cdots, X_{\tau\sigma(k+l+1)}) \right)$$

$(\because$ Prop 6.3.4 $)$

$$= \frac{1}{k!\,l!\,(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_{k+l+1} \\ \tau(1)=1}} \mathrm{sgn}(\tau\sigma)\, v_{\tau\sigma(1)} \left(\omega_1(X_{\tau\sigma(1)}, \cdots, X_{\tau\sigma(k+1)})\, \omega_2(X_{\tau\sigma(k+2)}, \cdots, X_{\tau\sigma(k+l+1)}) \right)$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \mathrm{sgn}(\sigma')\, v_{\sigma'(1)} \Big(\omega_1 (X_{\sigma'(2)}, \dots, X_{\sigma'(k+1)})\, \omega_2 (X_{\sigma'(k+2)}, \dots, X_{\sigma'(k+l+1)}) \Big)$$

$$\left(\sigma' = \tau\sigma \rightsquigarrow \sum_{\sigma} \sum_{\substack{\tau \\ \tau(1)=1}} = (k+l)! \sum_{\sigma'} \right)$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \mathrm{sgn}(\sigma) \Big(\big(v_{\sigma(1)}\, \omega_1 (X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)})\big) (\omega_2)_p (v_{\sigma(k+2)}, \dots, v_{\sigma(k+l+1)})$$

$$+ (\omega_1)_p (v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)}) \big(v_{\sigma(1)}\, \omega_2 (X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+l+1)}) \big) \Big)$$

$$-\,\dot{}_p \quad (d\omega_1 \wedge \omega_2)_p (v_1, \cdots, v_{k+l+1})$$

$$= \frac{1}{(k+1)!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, (d\omega_1)_p (v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k+1)})\, (\omega_2)_p (v_{\sigma(k+2)}, \cdots, v_{\sigma(k+l+1)})$$

$$= \frac{1}{(k+1)!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \Bigg(\frac{1}{k!} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_{k+l+1} \\ \tau\sigma(j) = \sigma(j)\ \forall j = k+2, \cdots, k+l+1}} \operatorname{sgn}(\tau)\, v_{\tau\sigma(1)}\, \omega_1 (X_{\tau\sigma(2)}, \cdots, X_{\tau\sigma(k+1)}) \Bigg)$$

$$(\omega_2)_p (v_{\sigma(k+2)}, \cdots, v_{\sigma(k+l+1)})$$

$$= \frac{1}{k!\,(k+1)!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_{k+l+1} \\ \tau\sigma(j) = \sigma(j) \\ \forall j = k+2, \cdots, k+l+1}} \operatorname{sgn}(\tau\sigma) \Big(v_{\tau\sigma(1)}\, \omega_1 (X_{\tau\sigma(2)}, \cdots, X_{\tau\sigma(k+1)}) \Big) \cdot$$

$$(\omega_2)_p (v_{\tau\sigma(k+2)}, \cdots, v_{\tau\sigma(k+l+1)})$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\left(v_{\sigma(1)}\, \omega_1(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)})\right) \cdot (\omega_2)_p(v_{\sigma(k+2)}, \dots, v_{\sigma(k+l+1)})$$

$$\left(\sigma' = \tau\sigma \rightsquigarrow \sum_{\sigma} \sum_{\tau} = (k+1)! \sum_{\sigma'} \right)$$

$\tau\sigma(j) = \sigma(j)$
$\forall j = k+2, \dots, k+l+1$

また:

$$((-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2)(v_1, \dots, v_{k+l+1})$$

$$= \left((-1)^k (-1)^{k(l+1)} (d\omega_2 \wedge \omega_1)\right)(v_1, \dots, v_{k+l+1})$$

$$= (-1)^{kl} \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & l+1 & l+2 & \cdots & k+l+1 \\ 1 & k+2 & \cdots & k+l+1 & 2 & \cdots & k+1 \end{pmatrix}}_{(-1)^{kl}} (d\omega_2 \wedge \omega_1)(v_1, v_{k+2}, \dots, v_{k+l+1}, v_2, \dots, v_{k+1})$$

$$= (d\omega_2 \wedge \omega_1)(v_1, v_{k+2}, \dots, v_{k+l+1}, v_2, \dots, v_{k+1})$$

$$= (d\omega_2 \wedge \omega_1)(v_1, v_{k+2}, \dots, v_{k+l+1}, v_2, \dots, v_{k+1})$$

前のゼロと同じ

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(v_{\sigma(1)}\, \omega_2 (X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+l+1)}) \right) \omega_1 (v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)})$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega_1 (v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)}) \left(v_{\sigma(1)}\, \omega_2 (X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+l+1)}) \right)$$

これより

$$(d(\omega_1 \wedge \omega_2))_p (v_1, \dots, v_{k+l+1})$$

$$= \left(d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2 \right)_p (v_1, \dots, v_{k+l+1}) \quad \text{証}$$

Prop 4.3.5 を使った方が楽かも…