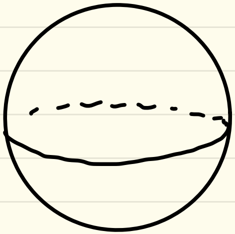
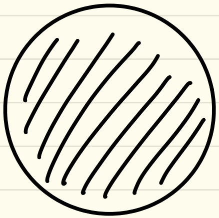
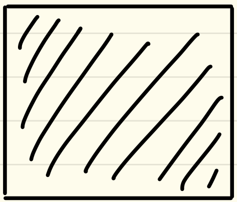
§8 角付き多様体



: 通常の意味の多様体



: "境界付き多様体"



: "角付き多様体"

Section 8 のテーマ

内容

- 境界、角における解析
- 境界付き多様体、角付き多様体の定義
- 各種概念の再定義

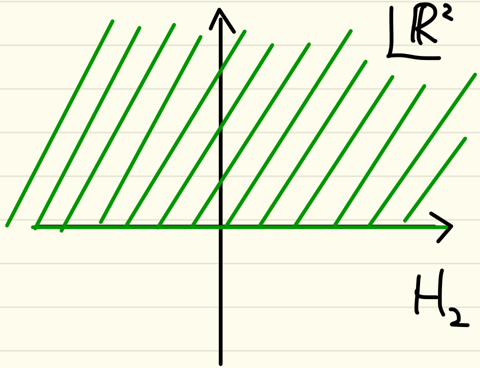
Section 8.1：境界，角における解析

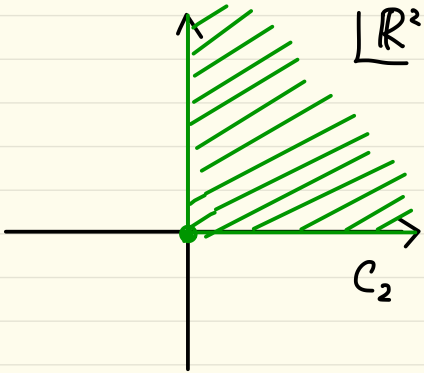
設定：$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 8.1.1：$H_k := \{ x = (x_1 \cdots x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0 \}$

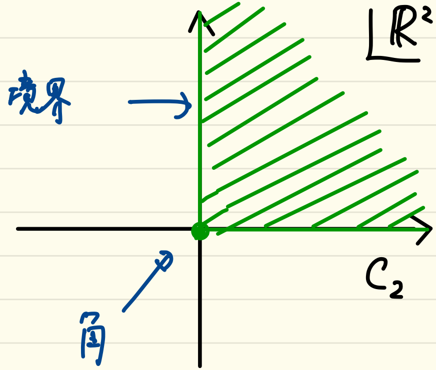
$C_k := \{ x \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq 0 \ (^\forall i) \}$

とおく





Q："角"や"境界"における
微分の議論はどうなる？



A："C^∞級関数"の定義による。 ← "何をやりたいか？"に依存する。

この講義では
"微分の議論"が通常の場合とほぼ同じになるように
"C^∞級関数"を定める。

← この講義では"ストークスの定理"
をやりたい。

以下，$D_k = H_k$ or C_k とする．

Def. 8.1.2：$U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$ について

$f : U \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級

$\overset{\text{def}}{\iff} {}^\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$: open，${}^\exists \tilde{f} \in C^\infty(\tilde{U})$

s.t. $U = \tilde{U} \cap D_k$，$f = \tilde{f}|_U$

（$\mathbb{R}^k$ の open set 上の C^∞ 級関数に延長可能）

Def 8.1.3 各 $U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$ について

$C^\infty(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f$ は C^∞ 級 $\}$

Prop 8.1.4 各 $U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$ について

$C^\infty(U)$ は 自然な和, スカラー倍, 積 について

(結合, 可換, 単位的) $\mathbb{R}$ 代数

Def 8.1.5 $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

$U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$, $V \underset{\text{open}}{\subset} D_l$ について

写像 $\tau : U \to V$ が C^∞ 級

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\tau^*(C^\infty(V)) \subset C^\infty(U)$

$\left(\begin{array}{l} \text{ただし } f \in C^\infty(V) \text{ について} \\ \quad \underset{f \circ \tau}{\underset{\shortparallel}{\tau^* f}} : U \to \mathbb{R},\ u \mapsto f(\tau(u)) \end{array} \right)$

Prop 8.1.6 $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

$U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$, $V \underset{\text{open}}{\subset} D_\ell$, 写像 $\tau : U \to V$ について

以下は同値

(i) τ は Def. 8.1.5 の意味で C^∞ 級 ($\tau^*(C^\infty(V)) \subset C^\infty(U)$)

(ii) $\tau(u) = (\tau_1(u), \cdots, \tau_n(u))$ $(u \in U)$

と書いたとき, $\tau_1, \cdots, \tau_n \in C^\infty(U)$

Def 8.1.2

Proof of Prop 8.1.6

まず (i) を仮定して (ii) を示す。 $^\forall i \in \{1, \dots, n\}$ をとる。 示 $\tau_i \in C^\infty(U)$

$v_i : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto v_i$ （記号の乱用）

とおくと $v_i \in C^\infty(V)$.

(i) より $\tau^* v_i \in C^\infty(U)$ であれば、定義より $\tau_i = \varphi^* v_i$.

(ii) が示された。

次に (ii) を仮定して (i) を示す。

$^\forall f \in C^\infty(V)$ をとる。 示 $\tau^* f \in C^\infty(U)$

i.e. $^\exists \hat{U} \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^k,\ ^\exists h \in C^\infty(\hat{U})$ s.t.

$U = \hat{U} \cap P_k,\ \tau^* f = h|_U$

いま $\tau_1, \cdots, \tau_n \in C^\infty(U)$ より

各 i について $\exists \tilde{U}_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\exists \tilde{\tau}_i \in C^\infty(\tilde{U}_i)$

s.t. $U = \tilde{U}_i \cap D_\varepsilon$, $\tau = \tilde{\tau}_i|_U$

また $f \in C^\infty(V)$ より $\exists \hat{V} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^l$, $\exists \tilde{f} \in C^\infty(\hat{V})$ s.t.

$V = \hat{V} \cap D_\varepsilon$, $f = \tilde{f}|_V$.

$\hat{\tau} : \bigcap_i U_i \to \mathbb{R}^l$, $u \mapsto (\tilde{\tau}_1(u), \cdots, \tilde{\tau}_n(u))$ とおく.

$\hat{U} := \bigcap_i U_i \cap \hat{\tau}^{-1}(\hat{V})$ とおくと

$\hat{\tau}$ は $\hat{U}$ から $\hat{V}$ への C^∞ 級写像. 特に $\hat{\tau}^* \tilde{f} \in C^\infty(\hat{U})$.

$\mathbb{R}^k$ の open　　$\mathbb{R}^l$ の open

$h = \hat{\tau}^* \tilde{f}$ とおけばよい.

∎

Def 8.1.7 (方向微分) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$ とする.

$p \in U$, $v \in \mathbb{R}^k$, $f \in C^\infty(U)$ に対し,

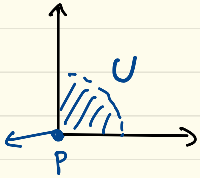
$$v_p(f) := v_p(\hat{f}) := \lim_{t \to 0} \frac{\hat{f}(p+tv) - \hat{f}(p)}{t} \in \mathbb{R}$$

とおく.

f の p における v 方向微分

拡張してやらないと定義域からはみでる.

ただし, $\hat{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\hat{f} \in C^\infty(\hat{U})$ with $U = \hat{U} \cap D_k$, $f = \hat{f}|_U$ とする.



Prop 8.1.8 方向微分は well-defined.

($\hat{f}$ の選び方によらない)

Proof of Prop 8.1.8

$p \in U$, $v \in \mathbb{R}^k$, $f \in C^\infty(U)$ を fix.

$\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\tilde{f}_1 \in C^\infty(\tilde{U}_1)$, $\tilde{f}_2 \in C^\infty(\tilde{U}_2)$

with $U = \tilde{U}_1 \cap D_k = \tilde{U}_2 \cap D_k$

$f = \tilde{f}_1|_U = \tilde{f}_2|_U$ をとる.

示 $v_p(\tilde{f}_1) = v_p(\tilde{f}_2)$

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ とおく.

このとき $v_p(\tilde{f}_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left((e_i)_p(\tilde{f}_k)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial \tilde{f}_k}{\partial u_i}(p)$

$(k = 1, 2)$

従って以下を示せば十分

示 $\dfrac{\partial \tilde{f}_1}{\partial u_i}(p) = \dfrac{\partial \tilde{f}_2}{\partial u_i}(p) \quad (\forall i)$

いま $\tilde{f}_k|_U = f$, $U = \hat{U} \cap D_k$ であり

各 i について $p + \tau e_i \in D_k \ (\forall \tau \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ に注意すると,

$$\frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial u_i}(p) := \lim_{\tau \to 0} \frac{\tilde{f}_k(p+\tau e_i) - \tilde{f}_k(p)}{\tau} = \lim_{\tau \to +0} \frac{f(p+\tau e_i) - f(p)}{\tau}$$

← k に依存しない

よって $\dfrac{\partial \tilde{f}_1}{\partial u_i}(p) = \dfrac{\partial \tilde{f}_2}{\partial u_i}(p) \quad (\forall i)$ ∎

Def 8.1.9. $p \in U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$ とする.

$$T_pU := \{ y : C^\infty(U) \to \mathbb{R} \mid y \text{ は線型 かつ } p \text{ におけるライプニッツ則を満たす} \}$$

$$\left(\text{i.e. } \forall f, h \in C^\infty(U),\ y(f \cdot h) = y(f) \cdot h(p) + f(p) \cdot y(h) \right)$$

とおく.

Prop 8.1.10: T_pU は自然な和とスカラー倍についてベクトル空間となる.

└

Theorem 8.1.11 $p \in U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$ とする.

$$\varphi : \mathbb{R}^k \to T_pU$$
$$v \longmapsto v_p$$

は well-defined かつ線型同型

Proof of Thm 8.1.9 :

φ の well-defined 性, 線型性の証明は省略

(Prop 8.1.8 を用いる)

示 $\varphi : \mathbb{R}^k \to T_pU$ は全単射

以下の3つの命題から直ちに従う

以下, $\hat{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$ with $U = \hat{U} \cap D_k$ を固定する.

Prop 8.1.12 : $\gamma : T_pU \to T_p\hat{U}$, $v \mapsto v \circ \mathrm{rest}^{\hat{U}}_{U}$

(ただし, $\mathrm{rest}^{\hat{U}}_{U} : C^\infty(\hat{U}) \to C^\infty(U)$, $f \mapsto f|_U$)

は well-defined かつ 単射線型写像

(Hint : Cut-off 関数使う)

Prop 8.1.13 $\Psi_{p,\tilde{U}} : \mathbb{R}^k \to T_p\tilde{U}$ $\quad$ ($\tilde{U} \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^k$)

$$v \mapsto v_p : C^\infty(\tilde{U}) \to \mathbb{R}$$

(p における v 方向微分)

とすると $\Psi_{p,\tilde{U}}$ は全単射線型写像

幾何A の内容 (2020年度 の Section 4)

Prop 8.1.14 $\Psi_{p,\tilde{U}} = \gamma \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd}
 & T_pU \arrow[d] \\
\mathbb{R}^k \arrow[ur] \arrow[r, "\sim"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3] & T_p\tilde{U}
\end{tikzcd}$$

∎

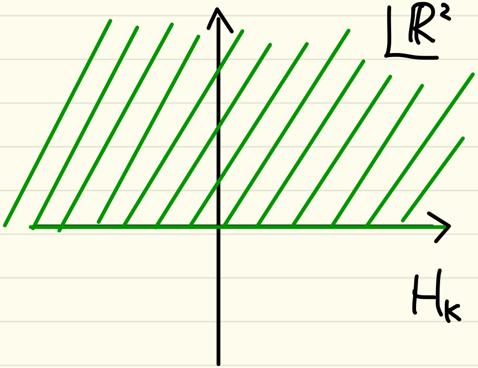
Section 8.2：境界付き、角付き多様体

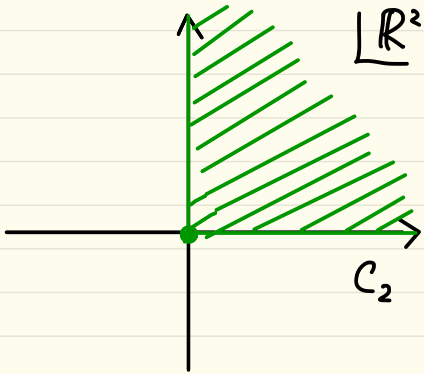
設定：$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Ω：位相空間

記号：$H_k := \{ x = (x_1 \cdots x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0 \}$

$C_k := \{ x \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq 0 \ (\forall i) \}$





アイデア

通常の k-次元 C^∞-級多様体 : $\mathbb{R}^k$ の open set 達を用いた地図帳がある.

座標変換が C^∞

境界付き 〃 : H_k の 〃

角付き 〃 : C_k の 〃

以下，$D_k = H_k$ or C_k とする．

Def 8.2.1：(O, U, u) が Ω 上の D_k-局所座標 (local coordinate)

$$\overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} {}^{\exists} O \subset \Omega : \text{open} \\ {}^{\exists} U \subset D_k : \text{open} \\ u : O \to U : \text{同相写像} \end{cases}$$

Def. 8.2.2：

$$\mathcal{LC}(\Omega : D_k) := \{ (O, U, u) \mid \Omega \text{ 上の } D_k\text{-loc. coord.} \}$$

（独自記号なので注意）

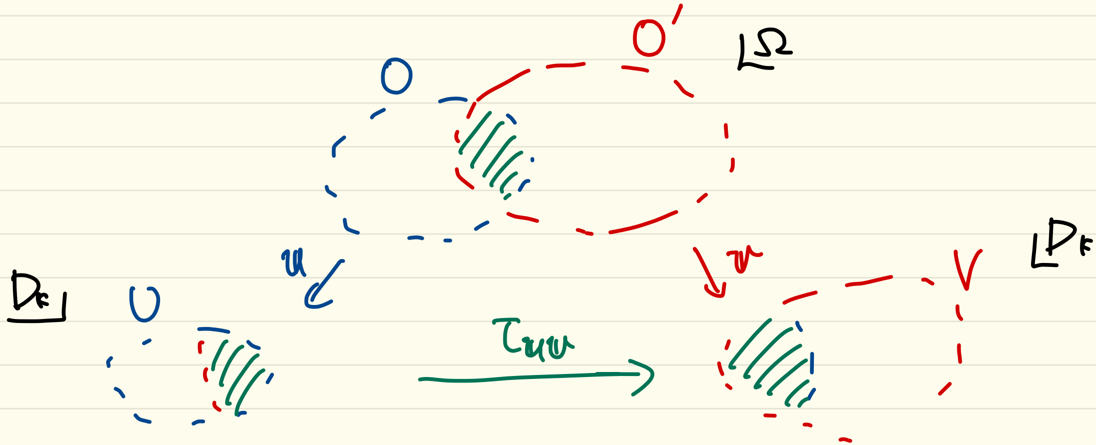
Def 8.2.3 (座標変換):

$(O, U, \mathfrak{u}), (O', V, \mathfrak{v}) \in \mathcal{L}C(\Omega : D_k)$ について

$\tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} := \mathfrak{v} \circ \mathfrak{u}^{-1} : \mathfrak{u}(O \cap O') \to \mathfrak{v}(O \cap O'),\ u \mapsto \mathfrak{v}(\mathfrak{u}^{-1}(u))$

とおく

$\mathfrak{u}$ から $\mathfrak{v}$ への座標変換



Def 8.2.4 $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(\Omega : D_K)$ が

Ω 上の D_K-atlas

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$ (i) $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u)\in\mathcal{A}_0} O = \Omega$

&

(ii) $\forall (O,U,u), (O',V,v) \in \mathcal{A}_0$ with $O\cap O' \neq \emptyset$,

$\tau_{uv} : \underset{\substack{\text{open}\\ \cap \\ D_K}}{u(O\cap O')} \to \underset{\substack{\text{open}\\ \cap \\ D_K}}{v(O\cap O')}$

座標変換

は Def 8.1.5 の意味で C^∞級

Def 8.2.5 $(\Omega, \mathcal{A})$ が k 次元 C^∞-級 境界付き多様体

(resp. k 次元 C^∞-級 角付き多様体)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(i) Ω は Hausdorff, 第二可算公理 を満たす 空でない位相空間

&

(ii) $\mathcal{A}$ は 極大 H_k-atlas on Ω

(resp. 極大 C_k-atlas on Ω)

以下 "境界付き多様体" を "manifold with boundary" (mfd. w.b.)

"角付き多様体" を "manifold with corners" (mfd. w.c.) と書く.

通常の C^∞-atlas の場合と同様に
次の命題が成り立つ。

Prop 8.2.6: $D_k = H_k$ or C_k,

$\mathcal{A}_0 \subset LC(\Omega : D_k)$: D_k-atlas on Ω
とする。

このとき $\exists!\ \mathcal{A}$: 極大 D_k-atlas on Ω
with $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$.

$\left(\mathcal{A} := \left\{ (O, U, u) \in LC(\Omega ; D_k) \;\middle|\; {}^\forall (O', V, v) \in \mathcal{A}_0 \;\; \tau_{uv}, \tau_{vu} \text{ は } C^\infty \right\} \right.$
とおけばよい

Remark：“素朴な意味”で

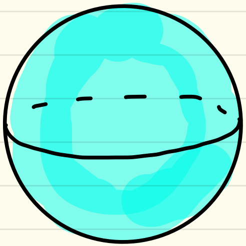
$$\begin{array}{c} \{k\text{-dim'l } C^\infty\text{-mfds}\} \\ \cap \\ \{k\text{-dim'l } C^\infty\text{-mfd w.b.}\} \\ \cap \\ \{k\text{-dim'l } C^\infty\text{-mfd. w.c.}\} \end{array} \quad \Bigg\downarrow \ \text{一般化}$$

と解釈してよい（正確には圏論の議論が必要なのでここでは詳細は省く）

Ex 8.2.7: 閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ は

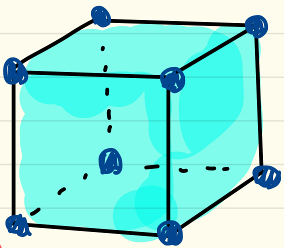
1-dim'l mfd w.b.

(1次元の場合は $H_1 = C_1$ なので境界と角の区別はない)



k次元ボール $\{x \in \mathbb{R}^k \mid \sum x_i^2 \leq 1\}$ は

k-dim'l mfd w.b.



k次元立方体 $[0,1]^k \subset \mathbb{R}^k$ は

k-dim'l mfd w.c.

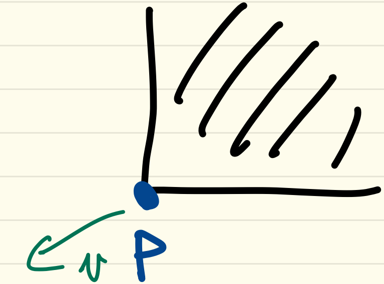
Section 8.3 : 各種概念の再定義

通常の意味の C^∞ 級多様体のときと同様に
以下の概念が定義でき，抽象論も同様に展開できる．
(Section 8.1 のおかげ)

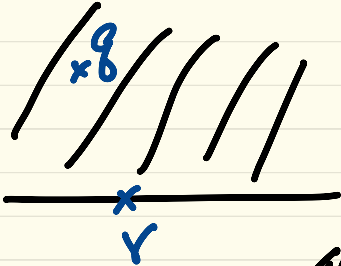
C^∞ 級関数，接空間，C^∞ 級写像，写像の微分，
cut-off 関数，ベクトル場，微分形式
(ブラケット積)　(外積，外微分)

ただし，"曲線の速度ベクトル" についてはあまりうまくいかないので注意
(この講義では定義しない)

Claim :



と



は

微分同相ではない

（同相ではある）

気持ち

q における∀接ベクトルは
∃曲線の速度ベクトルとして書ける.

p における接ベクトルは
曲線の速度ベクトルとして書けるとは限らない