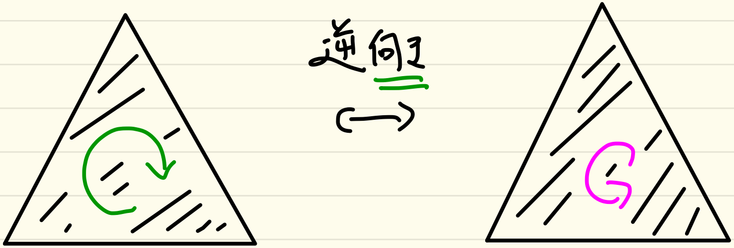
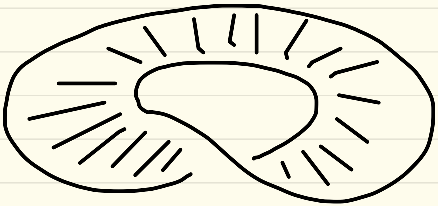
Section 9 : 多様体の向き





Möbius の帯は

向き付け不可能な境界付き多様体

"向き" はどうやって定義する?

内容：

- 句式の定義
- 句式の分類

Section 9.1 : 多様体の向き

$\Omega = (\Omega, \mathcal{A})$: k-dim'l C^∞-mfd with corners

Def 9.1.1 :

$$\mathcal{A}^{\mathrm{conn}} := \{ (O, U, u) \in \mathcal{A} \mid O \text{ は連結} \}$$

$\Uparrow$

(弧状連結)

($\because$ C_k の性質)

Prop 9.1.2 : $\mathcal{A}^{\mathrm{conn}}$ は Ω 上の atlas

特に $\displaystyle\bigcup_{(O, U, u) \in \mathcal{A}^{\mathrm{conn}}} O = \Omega$

Hint: $\mathcal{A}$ は極大 $\rightsquigarrow$ 各地図の連結成分も地図

Ω 上の向き σ を定義しよう

Def 9.1.3: 写像 $\sigma : \mathcal{A}^{conn} \to \{1, -1\}$ が $(\Omega, \mathcal{A})$ の向き

$$(O, U, u) \mapsto \sigma(u)$$

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}^{conn}$ with $O \cap O' \neq \emptyset$

について以下が成り立つ:

(i) $\sigma(u) \cdot \sigma(v) = 1$ のとき

$$\det J_{u(p)}(\tau_{uv}) > 0 \quad (\forall p \in O \cap O')$$

(ii) $\sigma(u) \cdot \sigma(v) = -1$ のとき

$$\det J_{u(p)}(\tau_{uv}) < 0 \quad (\forall p \in O \cap O')$$

(☆)

座標変換

Def 9.1.3（再掲） 写像 $\sigma : \mathcal{A}^{conn} \to \{1, -1\}$ が $(\Omega, \mathcal{A})$ の向き

$$(O, U, u) \mapsto \sigma(u)$$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}^{conn}$ with $O \cap O' \neq \emptyset$

について以下が成り立つ：

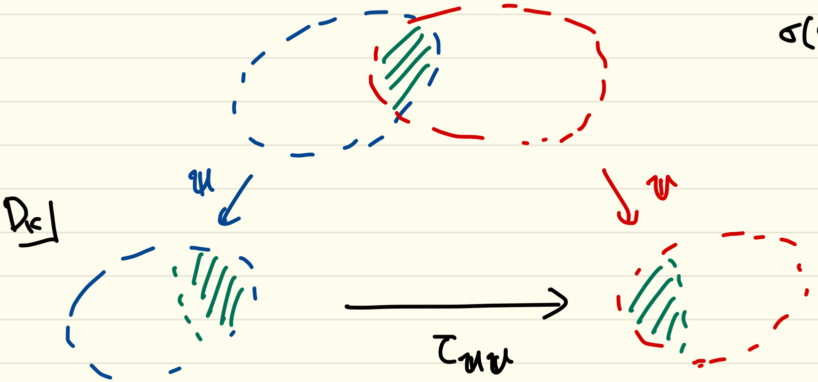
(i) $\sigma(u) \cdot \sigma(v) = 1$ のとき

$\det J_{u(p)}(\tau_{uv}) > 0 \quad (\forall p \in O \cap O')$

(ii) $\sigma(u) \cdot \sigma(v) = -1$ のとき

$\det J_{u(p)}(\tau_{uv}) < 0 \quad (\forall p \in O \cap O')$

☆



$\sigma(u) = \sigma(v)$

$\Longleftrightarrow$ τ_{uv} は "D_K の向き" を保つ

Recall :

$$J_{u(p)}\left(\tau_{uv}\right) := \left(\frac{\partial (\tau_{uv})_j}{\partial u_i}(u(p)) \right)_{i,j=1,\cdots,k}$$

Theorem 9.1.4 (幾何Aの内容の“肩付き” version)

$v \in T_p\Omega$ について

$T_p\Omega$ の座標基底

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_{j=1}^{k} b_j \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\right)_p \quad \left(\begin{array}{l} a_1,\cdots,a_k \in \mathbb{R} \\ b_1,\cdots,b_k \in \mathbb{R} \end{array}\right)$$

と書けるとき

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = J_{u(p)}(\tau_{uv}) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

Remark: 本講義での向きの定義はかなり特殊な形である.
積分論に使いやすい形を採用した.

よくある定義は以下のようなものであるが,
この講義の定義と"同値"である.

Ωの向きとは...

各点 p において $\underbrace{\bigwedge^k T_pM}_{\text{1次元}} \setminus \{0\}$ の連結成分を指定したもの

$(k = \dim \Omega)$

ただし 指定の仕方は p について"連続" (厳密に述べるには fiber束の言葉で必要)

次の定理が成り立つ

Theorem 9.1.5: $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}^{conn}$ を Ω 上の C_k-atlas とする.

(see Section 8)

$$\{\Omega \text{ 上の向き}\} \ni \sigma$$

$$\updownarrow \; 1:1$$

$$\left\{ \sigma_0 : \mathcal{A}_0 \to \{1, -1\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall (O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}_0 \\ \text{with } O \cap O' \neq \emptyset \text{ は} \\ \text{Def 9.1.3 の ★ を満たす} \end{array} \right\} \ni \sigma|_{\mathcal{A}_0}$$

Thm 9.1.5 の向きづけ :

$\sigma_0 : \mathcal{A}_0 \to \{\pm 1\}$ with ☆ から

$\sigma : \mathcal{A}^{conn} \to \{\pm 1\}$ with ☆ を構成したい.

各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}^{conn}$ について

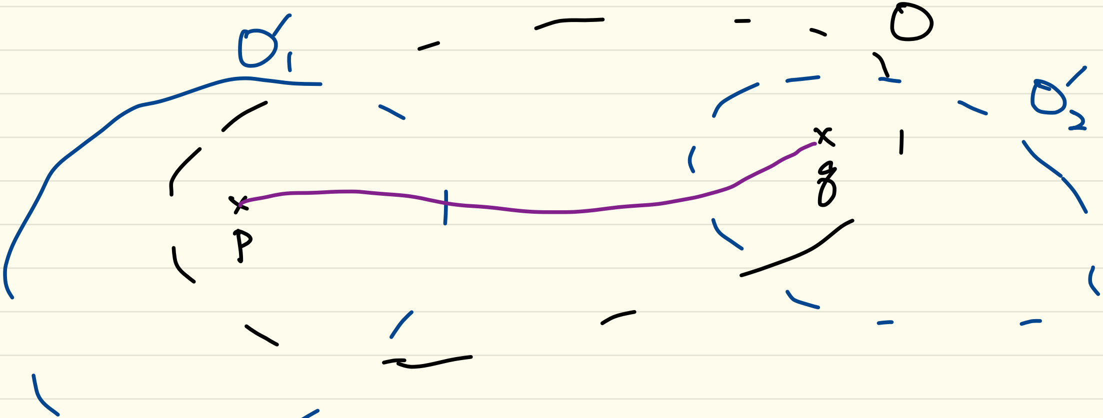
$p \in O$, $(O', V, v) \in \mathcal{A}_0$ with $p \in O'$ をとり,

$$\sigma_u := \begin{cases} \sigma_v & (\text{if } \det J_{T_{uv}}(u(p)) > 0) \\ -\sigma_v & (\text{if } \quad \sim \quad < 0) \end{cases}$$ と定めればよい

Claim : σ_u は $p \in O$, $(O', V, v) \in \mathcal{A}_0$ with $p \in O'$ のとり方によらない

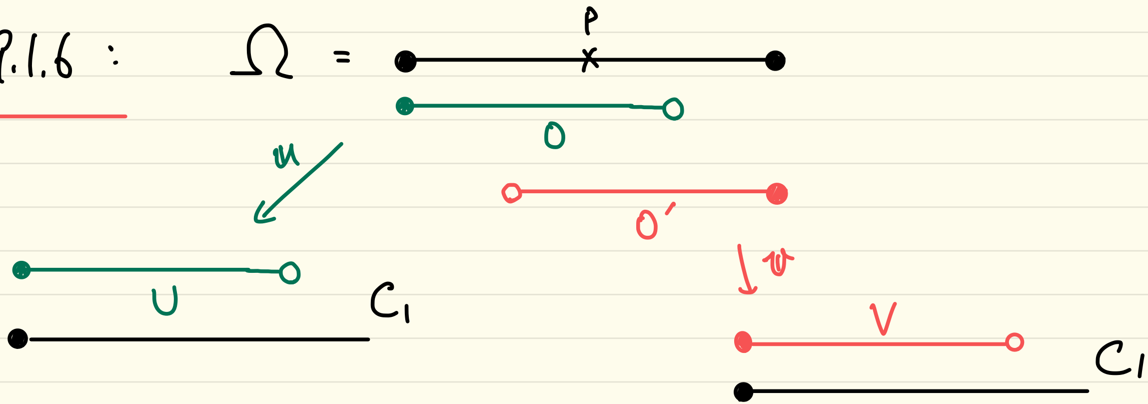
Claim : G_u は $p \in O$, $(O', V, \psi) \in \mathcal{A}_0$ with $p \in O'$ のとり方によらない。

Hint :



O は弧状連結

Ex 9.1.6 :



このとき $\det J_{u(p)}(\tau_{uv}) < 0 \quad (\forall p \in U \cap V)$

特に $\sigma_1, \sigma_2 : \underset{\{u,\, v\}}{\underset{\shortparallel}{A_0}} \longrightarrow \{1, -1\}$ を $\sigma_1(u) = 1,\ \sigma_1(v) = -1$, $\sigma_2(u) = 1,\ \sigma_2(v) = 1$

とすると σ_1, σ_2 は Ω 上の向きを定める.

σ_1 と σ_2 は "逆向き"

§9.2 向きの分類

Ω が連結のとき次が成り立つことが知られている(詳細略)

Theorem 9.2.1: Ω: 連結 k-dim'l C^∞-mfd w.c. とする.

このとき

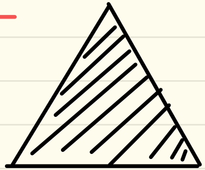
$$\#\{\Omega \text{ 上の向き}\} = \begin{cases} 2 & \left(\text{if 1次元ベクトル束 } \bigwedge^k T^\vee\Omega \text{ の枠束が主 } \mathbb{R}^\times \text{ 束として自明}\right) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

非連結 Lie 群

Corollary 9.2.2: : Ω : 連結かつ単連結とする.

このとき $\#\{\Omega \text{ 上の向き}\} = 2$

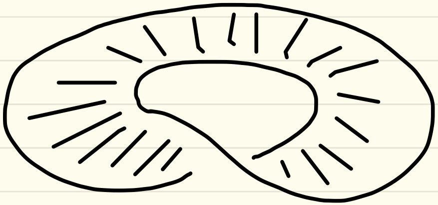
Ex 9.2.3 :



は 向きは 2種類

(連結単連結)

Ex 9.2.4 :



Möbius の帯 は

$\{$向き$\} = \emptyset$

Ex 9.2.4 の証明：

以下の Observation は向きの定義から直ちに従う：

Observation 9.2.5：

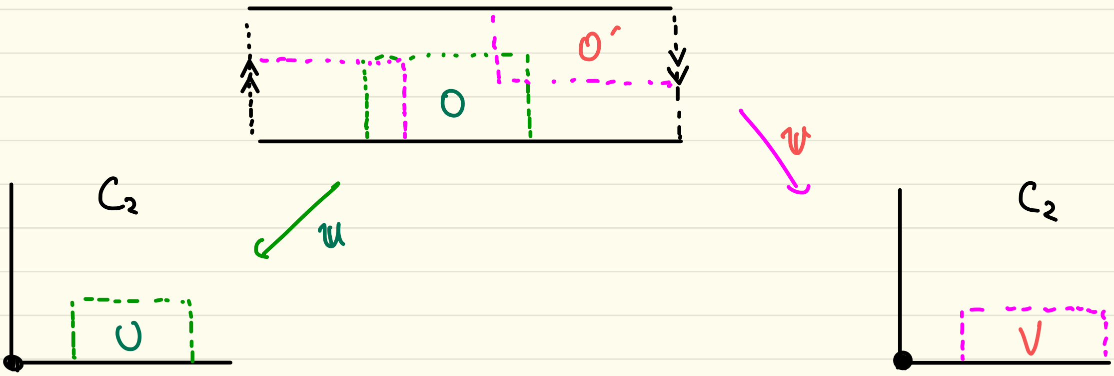
$\Omega = (\Omega, \mathcal{A})$: k-dim'l C^∞-mfd w.c. とする.

$(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}^{\mathrm{conn}}$ であって以下の条件を満たすものが存在するとき, $\{\Omega$ の向き$\} = \emptyset$

条件 : $\exists p, q \in O \cap O'$ s.t. $\det J_{u(p)}(\tau_{vu}) > 0$ かつ

$\det J_{u(q)}(\tau_{vu}) < 0$

Möbius の帯の局所座標 (O, U, u), (O', V, v) を



のようにとると, Obs 9.2.5 の条件を満たしてしまうので

$\{$ Möbius の帯の向き $\} = \emptyset$ ∎