Section 10: 1の分割

Recall: Cut-off 関数 (cf. Section 2) は

"局所的に定義できているものを
全体に延長する" のに便利
(Thm 2.2.3 など)

1の分割 は更に進化して

"各点のまわりで定義されているものを貼り合わせて
全体で定義する" のに便利

内容：

- 1の分割の定義
- 1の分割の存在定理

Section 10.1 : 位相空間上の1の分割

X : 位相空間

$\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: X の部分集合族とする.

Def. 10.1.1 : $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が局所有限 (locally finite)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x \in X$, $\exists V_x$: x の open nbd

s.t. $\Lambda(V_x) := \{\lambda\in\Lambda \mid C_\lambda \cap V_x \neq \emptyset\}$

が有限.

Def. 10.1.2 (復習)

$\varphi : X \to \mathbb{R}$ について

$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}}$

Xにおける閉包

$\mathcal{O}$: X の open cover とする.

Def 10.1.3 (1 の分割)

X 上の連続関数の族 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が

$\mathcal{O}$ に従う 1 の分割 (partition of unity subordinate to $\mathcal{O}$)

PUS to $\mathcal{O}$ と略す

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) $\varphi_\lambda(x) \in [0,1]$ $({}^\forall\lambda, {}^\forall x)$

(2) ${}^\forall\lambda\in\Lambda, {}^\exists O\in\mathcal{O}$ s.t. $\operatorname{supp}\varphi_\lambda \subset O$

(3) $\{\operatorname{supp}\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は局所有限

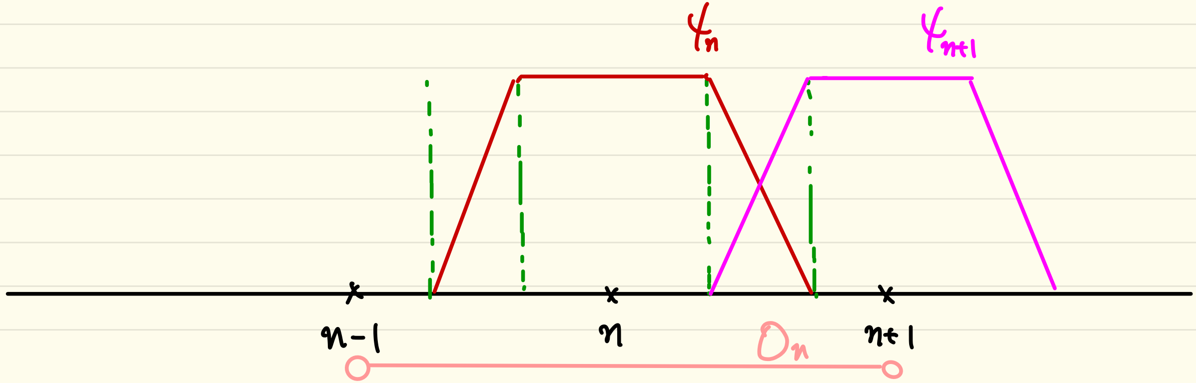
(4) $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x) = 1$ $({}^\forall x\in X)$ ((3) より左辺は有限和)

Ex 10.1.4 $\quad X = \mathbb{R}$

$\mathcal{O} = \{ O_n := (n-1, n+1) \}_{n \in \mathbb{Z}}$ a とる

$\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を $\quad \psi_n(x) = \begin{cases} 1 & n-\frac{1}{3} \le x \le n+\frac{1}{3} \\ 3(x-(n-\frac{2}{3})) & n-\frac{2}{3} \le x < n-\frac{1}{3} \\ -3(x-(n+\frac{1}{3}))+1 & n+\frac{1}{3} < x \le n+\frac{2}{3} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

とおくと PUS to $\mathcal{O}$.



定義が流儀によって異なるので注意

この講義では積分論が展開しやすい定義を採用した

別の流儀（主流はこちら）

Def. 10.1.5 : $\{\varphi_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ が"強い意味"で Θ に従う1の分割

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

① $\varphi_\theta : X \to [0,1]$: 連続

② $\operatorname{supp}\varphi_\theta \subset \theta$

③ $\{\operatorname{supp}\varphi_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ は局所有限

④ $\displaystyle\sum_{\theta\in\Theta}\varphi_\theta(x) = 1 \quad (\forall x\in X)$

Remark : Def 10.1.4 の意味の PUS to Θ から
選択公理を用いて Def 10.1.5 の意味の
PUS to Θ が構成できる.

応用例

Cor 10.1.6 : $\{\psi_\theta\}_{\theta\in\Theta}$: PUS to Θ in Def 10.1.5 とする.

$\{f_\theta : O \to \mathbb{R}_{>0}\}_{\theta\in\Theta}$: 正値連続関数の族に対して

$$f : X \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \sum_{\theta\in\Theta} f_\theta(x)\cdot\psi_\theta(x)$$

は well-defined, 連続 かつ 正値.

この講義では用いないが以下の定理が成りたつ.

Theorem 10.1.7 : X がパラコンパクトかつ Hausdorff とする.

このとき

$^\forall \mathcal{O}$: X の open cover

$^\exists \{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: PUS to $\mathcal{O}$

(X がパラコンパクト $\overset{\longleftrightarrow}{\text{def}}$ $^\forall \mathcal{O}$: X の open cover

$^\exists \mathcal{O}'$: X の locally finite open cover

s.t. $^\forall O \in \mathcal{O}'$, $^\exists \tilde{O} \in \mathcal{O}$ s.t. $O \subset \tilde{O}$)

Section 10.2: 多様体上の1の分割

Ω : k-dim'l C^∞-mfd with corners とする.

このとき次の定理が成り立つ.

Theorem 10.2.1 :

$^\forall \mathcal{O}$: Ω の open cover

$^\exists \{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: PUS to $\mathcal{O}$

s.t. $\varphi_\lambda \in C^\infty(\Omega)$ $\quad$ ($^\forall \lambda \in \Lambda$)

この定理の証明には第二可算公理, Hausdorff性を用いる.

証明は付録ノートとしてアップロード予定.

Def 10.2.2: 位相空間 X が第二可算公理を満たす

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X は可算開基を持つ

Thm 10.2.1 の証明のための Key lemma

Lemma 10.2.3: 位相空間 X が Hausdorff かつ 局所コンパクト かつ 第二可算公理 を満たすとする. このとき X の 可算開被覆 $\mathfrak{X} = \{Z_k\}_{k=1,2,\cdots}$ であって 各 Z_k が X 内で相対コンパクトなものが存在する.

Thm 10.2.1 の証明のアイデア

$\mathcal{O}$: Ω の open cover を fix.

"$\forall p \in \Omega$, $^{\exists} O \in \mathcal{O}$ s.t. $\mathrm{supp}\, b_p \subset O$"

① 各点 $p \in \Omega$ のまわりで $\mathrm{supp}\, b_p$ が十分小さい C^∞ 級 cut-off 関数 $b_p : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を作る.

(更にいくつかの条件を課す)

② $\{b_p\}_{p \in \Omega}$ をうまく間引いて $\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を作り

ここが大変 (Lemma 10.2.3 使う)

- $\{\mathrm{supp}\, b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が局所有限
- $\forall p \in \Omega$, $^{\exists}\lambda \in \Lambda$ s.t. $b_\lambda(p) > 0$

となるようにする.

③ $h := \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \in C^\infty(\Omega)$ とおくと $h(p) > 0$ ($^{\forall} p$).

$\left\{ \psi_\lambda := \dfrac{b_\lambda}{h} \right\}_{\lambda \in \Lambda}$ とおけば ok.

詳しくは付録ノートで

応用例（この講義では使わない）

Theorem 10.2. 任意の C^∞-mfd w.c. はリーマン計量を持つ.

特に距離化可能.

Hint：各座標で計量を定義しておいて,

Cor 10.1.6 と同じアイデアで

全体で貼り合わせる.