Section 11 : 微分形式の積分

設定 :

$M := (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners

$\sigma : \mathcal{A}^{\mathrm{conn}} \to \{\pm 1\}$: M 上の向き

記号 :

$\Omega^k(M) \cong \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$

k-form 全体のなす $C^\infty(M)$ 加群 $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

目標

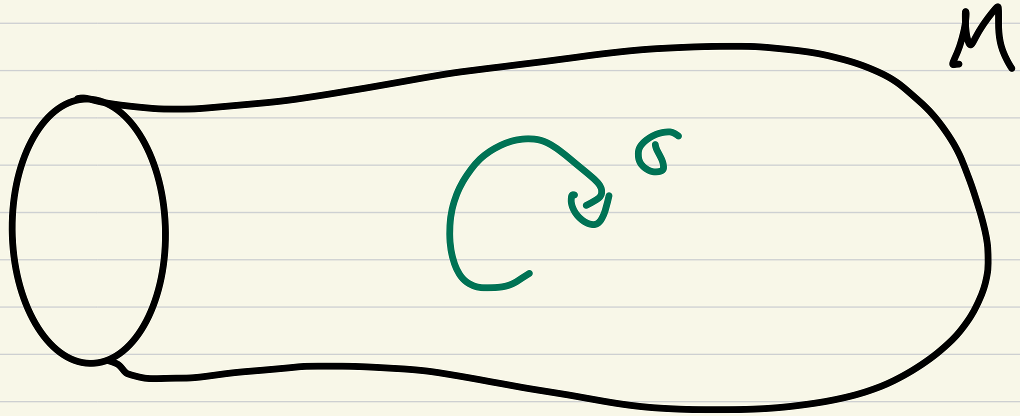
Mの次元

各 $\omega \in \Omega^n(M)$ について $\mathrm{supp}\,\omega$ がコンパクトのとき

積分 $\int_{(M,\sigma)} \omega \in \mathbb{R}$ を定義する.

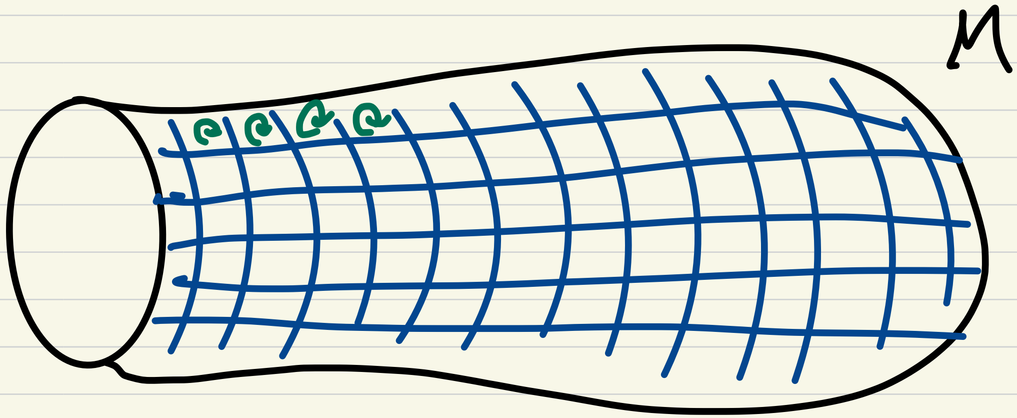
$\int_{(M,\sigma)} \omega$ の気持ち

向き付き多様体



↓

向き付き
微小平行四辺形
に"分割"



各微小平行四辺形を ω に代入して足しあげる

supp ω がコンパクトでないと有限和にならない

難点：M を微小平行四辺形で分割できる？

〜→ きれいに分割するのは無理.

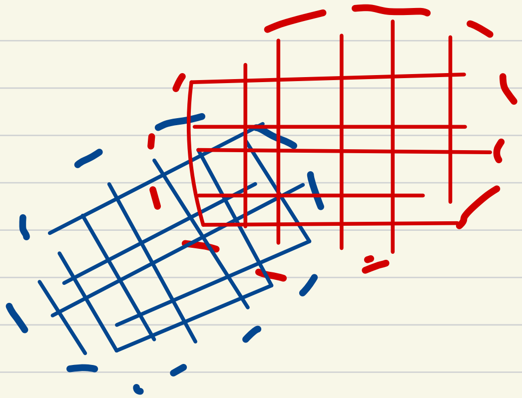
雰囲気：各局所座標上では分割できる.

（リーマン積分の本質）

M 全体では"1の分割"を用いて

各局所座標上の分割を

全体で"重ね合わせる".



Section 11.1 : コンパクト台を持つ微分形式

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 : $\Lambda^k(M) \coloneqq \Gamma(\bigwedge^k T^\vee M)$:

M 上の k-form 全体のなす $C^\infty(M)$ 加群

Def 11.1.1 : 各 $\omega \in \Omega^k(M) \cong \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ について

$\operatorname{supp}\omega := \overline{\{ p \in M \mid \omega_p \neq 0 \}}$ ← M における閉包

Def 11.1.2 :

$\Omega^k_c(M) := \{ \omega \in \Omega^n_c(M) \mid \operatorname{supp}\omega$ はコンパクト $\}$

Prop 11.1.3 :

$\Omega^k_c(M)$ は $\Omega^n(M)$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群

以下 $O \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

Def 11.1.4

$\Lambda_c^k(M; O) := \{ \omega \in \Lambda_c^k(M) \mid \operatorname{supp} \omega \subset O \}$

Prop 11.1.5

$\Lambda_c^k(M; O)$ は $\Lambda_c^k(M)$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群

以下の命題は後で使う

Prop 11.1.6 各 $\omega \in \Omega_c^k(M;O)$ について

M における support

O における support

$$\mathrm{supp}(\omega|_O) = \mathrm{supp}\,\omega$$

特に $\Omega_c^k(M;O) \to \Omega_c^k(O),\ \omega \mapsto \omega|_O$ は well-defined

Hint: M の Hausdorff 性を使う

Section 11.2 : C_n 上のリーマン積分

C_n の開集合上の関数のリーマン積分の記号を設定しておく.

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ← n次元 向付き 多様体

$\emptyset \neq U$: C_n の開集合

$$\left(C_n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ (\forall i = 1, \cdots, n) \} \right)$$

$\sigma_U \in \{\pm 1\}$

記号 :

$$C_c(U) := \{ f \in C(U) \mid \mathrm{supp} f : \text{コンパクト} \}$$

: U 上でコンパクト台を持つ連続関数全体のなすベクトル空間

$U \subset C_n \subset \mathbb{R}^n$ に注意

Fact 11.2.1 : ${}^\forall f \in C_c(U)$, f は U 上リーマン可積分

Def 11.2.2 :

$$I_{(U,\sigma_U)} : C_c(U) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \sigma_U \cdot (f \text{ の } U \text{ 上のリーマン積分})$$

（重積分 = 累次積分）

σ_U は $\{\pm 1\}$

Prop 11.2.3 : $I_{(U,\sigma_U)} : C_c(U) \to \mathbb{R}$ は線型写像

設定：

$U_1, U_2 \subset \mathbb{C}^n$ open, U_1, U_2 : 連結

$U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$

$\tau : U_1 \to U_2$: C^∞級同相

$$\left(\rightsquigarrow \begin{array}{ll} \det(J\tau)_u > 0 & (\forall u \in U_1) \\ \text{or} & \\ \det(J\tau)_u < 0 & (\forall u \in U_1) \end{array} \right)$$

$\sigma_{U_1}, \sigma_{U_2} \in \{\pm 1\}$

with $\sigma_{U_1} \cdot \sigma_{U_2} = 1 \iff \det(J\tau)_u > 0 \ (\forall u \in U_1)$

$\sigma_{U_1} \cdot \sigma_{U_2} = -1 \iff \det(J\tau)_u < 0 \ (\forall u \in U_1)$

Fact 11.2.4（変数変換公式の応用）

$\forall f \in C_c(U_2)$

$$I_{(U_1, \sigma_{U_1})}(\tau^* f) \cdot \det(J\tau)) = I_{(U_2, \sigma_{U_2})}(f)$$

f の τ による引き戻し

Section 11.3：局所座標上の微分形式の積分

設定：$M = (M, \mathcal{A})$ ： n-mfd with corners

$\sigma : \mathcal{A}^{\mathrm{conn}} \to \{\pm 1\}$, $(O, U, u) \mapsto \sigma_u$ ： M の向き

$(O, U, u) \in \mathcal{A}^{\mathrm{conn}}$

記号 $\Lambda^n_c(M; O) := \{ \omega \in \Lambda^n_c(M) \mid \mathrm{supp}\, \omega \subset O \}$

目標：$\int_{(O, \sigma_u)} : \Lambda^n_c(M; O) \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \int_{(O, \sigma_u)} \omega$ を定めよ.

Prop 11.3.1 : 各 $\omega \in \Lambda_c^n(M;O)$ について

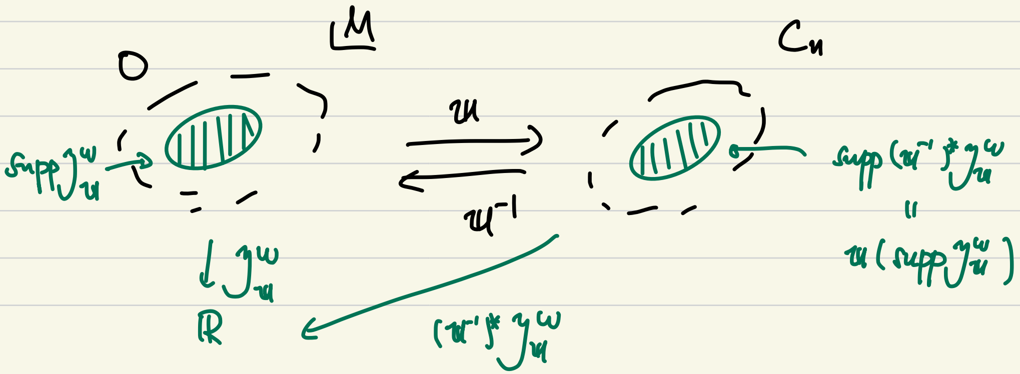
$$\exists!\, g_u^\omega \in C_c^\infty(O) \text{ s.t. } \begin{cases} \omega = g_u^\omega \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_n \\ \operatorname{supp} g_u^\omega = \operatorname{supp}(\omega|_O) = \operatorname{supp}\omega \end{cases}$$

Hint : Prop 11.1.6 + Section 6 の議論

Observation 11.3.2 : 上の設定で

$$(u^{-1})^* g_u^\omega \in C_c^\infty(U) \text{ かつ } \operatorname{supp}(u^{-1})^* g_u^\omega = u(\operatorname{supp}\omega)$$

$u^{-1} : U \to O$ による引戻し



Def 11.3.2

$$\int_{(U,\sigma_u)} : \Lambda_c^n(M;\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto I_{(U,\sigma_u)}\left(\underbrace{(u^{-1})^* j_u^{\omega}} \right)$$

$C_c^\infty(U) \subset C_c(U)$ の元

Prop 11.3.3

$\int_{(U,\sigma_u)} : \Lambda_c^n(M;\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ は線型写像

次の命題は後で使う

Prop 11.3.4: $(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}^{conn}$ with $O \cap O' \neq \emptyset$

$\omega \in \mathcal{A}_c^n(M; O \cap O')$ とする.

$\left(= \mathcal{A}_c^n(M; O) \cap \mathcal{A}_c^n(M; O')\right)$

このとき

$$\int_{(O, \sigma_u)} \omega = \int_{(O', \sigma_v)} \omega .$$

(どの局所座標で積分しても同じ)

気持ち: この命題が成り立つように

"微分形式" と "向き" を定義した.

Prop 11.3.4 は以下の Lemma, 向きの定義 (Def. 9.1.3)

および Fact 11.2.4 より従う

Lemma 11.3.5　Prop 11.3.4 の設定において

$$\omega|_O = g_u^\omega \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_n \quad (g_u^\omega \in C^\infty(O))$$

$$\omega|_{O'} = g_v^\omega \cdot dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \quad (g_v^\omega \in C^\infty(O))$$

とおくと、

$$(u^{-1})^* g_u^\omega \Big|_{u(O \cap O')} = \tau_{uv}{}^* \left((v^{-1})^* g_v^\omega \Big|_{v(O\cap O')} \right) \cdot \det(J\tau_{uv})$$

Hint: Thm 1.2.10 と Cor 4.3.14 (追加スライド)

Section 11.4：多様体上の微分形式の積分

設定：$M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners

$\sigma : \mathcal{A}^{\mathrm{conn}} \to \{\pm 1\}$: M の向き.

記号：$\Omega^n_c(M) := \{ \omega \in \Omega^n(M) \mid \mathrm{supp}\,\omega : \text{コンパクト} \}$

目標：$\int_{(M,\sigma)} : \Omega^n_c(M) \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \int_{(M,\sigma)} \omega$ を定める.

Theorem 11.4.1 (微分形式の積分)

線型写像 $\int_{(M,\sigma)} : \Lambda^n_c(M) \to \mathbb{R}$

$\omega \mapsto \int_{(M,\sigma)} \omega$

ω の (M,σ) 上の積分

であって，以下の条件★を満たすものが一意に存在する：

条件★：${}^\forall(O, U, u) \in \mathcal{A}^{\mathrm{conn}}$, ${}^\forall \omega \in \Lambda^n_c(M;O) \subset \Lambda^n_c(M)$

$$\int_{(M,\sigma)} \omega = \underbrace{\int_{(O,\sigma_u)} \omega}_{\text{Def 11.3.2}}$$

この定理の証明がこの節のゴール.

Thm 11.4.1 を示すため、命題を準備しておく.

準備の設定

$\mathcal{O} := \{O\}_{(O,U,u)\in\mathcal{A}^{\mathrm{conn}}}$ とおくと、

$\mathcal{O}$ は M の open cover であった (Prop 9.1.2)

$\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を PUS to $\mathcal{O}$ で $\psi_\lambda \in C^\infty(M)$ $(\forall\lambda)$ となる

ものを任意に fix (Thm 10.2.1 より存在が保障される)

各 $\lambda\in\Lambda$ について $\mathrm{supp}\,\psi_\lambda \subset O_\lambda$ となる

$(O_\lambda, U_\lambda, u_\lambda)\in\mathcal{A}^{\mathrm{conn}}$ を fix

$(O_\lambda\in\mathcal{O})$

Prop 11.4.2 : $^\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

代数的直和

写像 $\Xi_k : \Lambda_c^k(M) \to \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \Lambda_c^k(M; O_\lambda)$

$\omega \mapsto (\psi_\lambda \cdot \omega)_{\lambda \in \Lambda}$

有限個の成分を除いて0

は well-defined かつ 単射線型写像

Cor 11.4.3 : $^\forall \omega \in \Lambda_c^k(M)$,

support が局所座標に収まるように ω を有限個に分割できる.

$^\exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $^\exists (O_l, U_l, \varphi_l) \in \mathcal{A}^{\mathrm{conn}}$, $^\exists \omega_l \in \Lambda_c^k(M; O_l)$ $(l = 1, \cdots, N)$

s.t. $\omega = \sum_{l=1}^{N} \omega_l$

Proof of Prop 11.2.1 :

示 ① Ξ 為 well-defined

② Ξ 為 線型

③ Ξ 為 单射

① を示す: $\forall \omega \in \Lambda_c^k(M)$ をとる.

示 (i) $(\psi_\lambda \cdot \omega)_{\lambda\in\Lambda}$ は有限個の成分を除いてゼロ

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda$, $\mathrm{supp}(\psi_\lambda \cdot \omega)$ はコンパクトで $\mathrm{supp}(\psi_\lambda \cdot \omega) \subset O_\lambda$

まず各 $\lambda \in \Lambda$ について

$$\mathrm{supp}(\psi_\lambda \cdot \omega) \subset \mathrm{supp}\,\psi_\lambda \cap \mathrm{supp}\,\omega$$

に注意.

(i) $(\psi_\lambda \cdot \omega)_{\lambda\in\Lambda}$ は有限個の成分を除いてゼロを示す.

$\Lambda(\mathrm{supp}\,\omega) := \{\lambda\in\Lambda \mid \mathrm{supp}\,\psi_\lambda \cap \mathrm{supp}\,\omega \neq \emptyset\}$

とおく.

$\mathrm{supp}\,\psi_\lambda\cdot\omega \subset \mathrm{supp}\,\psi_\lambda \cap \mathrm{supp}\,\omega \quad (\forall\lambda)$ より

$\Lambda(\mathrm{supp}\,\omega)$ が有限集合であることを示せばよい.

いま $\{\mathrm{supp}\,\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が locally finite で

$\mathrm{supp}\,\omega$ がコンパクトであることから

$\Lambda(\mathrm{supp}\,\omega)$ は有限でなければならないことが分かる.

(i) が示された.

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda$, $\mathrm{supp}(\varphi_\lambda \cdot \omega)$ はコンパクトで $\mathrm{supp}(\varphi_\lambda \cdot \omega) \subset O_\lambda$

を示す.

$\forall \lambda \in \Lambda$ をとる.

$$\mathrm{supp}\, \varphi_\lambda \cdot \omega \subset \underbrace{\mathrm{supp}\, \varphi_\lambda}_{\subset O_\lambda} \cap \underbrace{\mathrm{supp}\, \omega}_{\text{コンパクト}} \subset O_\lambda$$

であり、$\mathrm{supp}\, \varphi_\lambda \cap \mathrm{supp}\, \omega$ は M のコンパクト閉集合,

$\mathrm{supp}\, \varphi_\lambda \cdot \omega$ は M の閉集合なので

$\mathrm{supp}\, \varphi_\lambda \cdot \omega$ はコンパクト.

(ii) が示された.

② Ξ の線型性は省略(簡単)

③ Ξ の単射性を示す：

(示) $\mathrm{Ker}\,\Xi = 0$

i.e. $\forall \omega \in \mathcal{A}_c^k(M)$ with $\psi_\lambda \cdot \omega = 0 \ (\forall \lambda)$,

$\omega = 0$.

$\forall \omega \in \mathcal{A}_c^k(M)$ with $\psi_\lambda \cdot \omega = 0 \ (\forall \lambda)$ をとる.

(示) $\omega = 0$

i.e. $\forall p \in M,\ \omega_p = 0$.

$\forall p \in M$ をとる.

示) $\omega_p = 0$

$\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(p) = 1$ に注意すると

$$\omega_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(p) \right) \cdot \omega_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\psi_\lambda \cdot \omega)_p$$

ここで 各 $\lambda \in \Lambda$ について $\psi_\lambda \cdot \omega = 0$ より

特に $(\psi_\lambda \cdot \omega)_p = 0$

従って $\omega_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\psi_\lambda \cdot \omega)_p = 0$.

③ が示された.

Theorem 11.4.1 (微分形式の積分) (再掲)

線型写像 $\int_{(M,\sigma)} : \Lambda^n_c(M) \to \mathbb{R}$　　ω の (M,σ) 上の積分

$\omega \mapsto \int_{(M,\sigma)} \omega$

であって，以下の条件(★)を満たすものが一意に存在する：

条件(★)：$^\forall (O,U,u) \in \mathcal{A}^{conn}$，$^\forall \omega \in \Lambda^n_c(M;O) \subset \Lambda^n_c(M)$

$$\int_{(M,\sigma)} \omega = \underbrace{\int_{(O,\sigma_u)} \omega}_{}$$

Def 11.3.2

Proof of Thm 11.4.1 :

① 存在

② 一意性

① 存在を示す：

線型写像 $\int_{(M,\sigma)} : \Lambda^n_c(M) \to \mathbb{R}$ を

次の線型写像の合成として定義する。

$$\Lambda^n_c(M) \xrightarrow{\Xi_n} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \Lambda^n_c(M;O_\lambda) \xrightarrow{\bigoplus_\lambda \int_{(O_\lambda,\sigma_{u_\lambda})}} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{R} \xrightarrow{\text{和}} \mathbb{R}$$

(示) 上記の $\int_{(M,\sigma)} : \Lambda^n_c(M) \to \mathbb{R}$ は ☆ を満たす。

i.e. $\forall (O,U,u) \in \mathcal{A}^{\mathrm{conn}}$, $\forall \omega \in \Lambda^n_c(M;O) \subset \Lambda^n_c(M)$

$$\int_{(M,\sigma)} \omega = \int_{(O,\sigma_u)} \omega$$

${}^\forall (O, U, \mathcal{U}) \in \mathcal{A}^{\mathrm{conn}}$, ${}^\forall \omega \in \Lambda_c^n(M; O)$ をとる.

示 $\displaystyle\int_{(M,\sigma)} \omega = \int_{(O,\sigma_{\mathcal{U}})} \omega$

各 $\lambda \in \Lambda$ について $\mathrm{supp}\, \psi_\lambda \cdot \omega \subset \mathrm{supp}\, \psi_\lambda \cap \mathrm{supp}\, \omega \subset O_\lambda \cap O$.

Prop 11.3.4 より $\displaystyle\int_{(O_\lambda, \sigma_{\mathcal{U}_\lambda})} (\psi_\lambda \cdot \omega) = \int_{(O,\sigma_{\mathcal{U}})} (\psi_\lambda \cdot \omega)$

となることに注意すると

$$\text{左辺} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{(O_\lambda, \sigma_{\mathcal{U}_\lambda})} (\psi_\lambda \cdot \omega) = \underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda}}_{\text{有限和}} \int_{(O,\sigma_{\mathcal{U}})} (\psi_\lambda \cdot \omega)$$

$$= \int_{(O,\sigma_{\mathcal{U}})} \Big(\underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda}_{=1}\Big) \cdot \omega = \int_{(O, \mathcal{U}_\lambda)} \omega = \text{右辺}$$

① が示された.

② 一意性を示す：

線型写像 $S : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ が以下（☆☆）を満たすとする：

（☆☆）$\forall (O, U, u) \in A^{\mathrm{conn}}$, $\forall \omega \in \Omega_c^n(M; O)$, $S(\omega) = 0$.

以下を示せば十分

（示）$S = 0$

i.e. $\forall \omega \in \Omega_c^n(M)$, $S(\omega) = 0$.

$\forall \omega \in \Omega_c^n(M)$ をとる.

（示）$S(\omega) = 0$.

Cor 11.4.3 より,

ある $(O_l, U_l, \mathcal{U}_l) \in \mathcal{A}^{conn}$, $\omega_l \in \Lambda^n_c(M; O_l)$ $(l = 1, \cdots, N)$

を用いて $\omega = \sum_{l=1}^{N} \omega_l$ と書ける.

$$S(\omega) = S\left(\sum_{l=1}^{N} \omega_l\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{N} S(\omega_l) \quad (\because S の線型性)$$

$$= 0 \quad (\because ☆☆)$$

② が示された.

∎