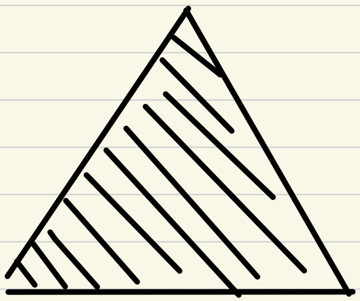
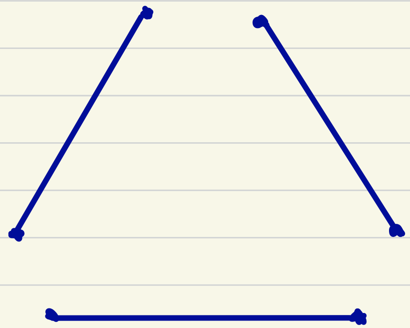
Section 12：境界多様体

角付き多様体 M の"境界" ∂M を

たとえば

$M \xrightarrow{\text{境界}} \partial M$ (3つの連結成分を持つ1次元角付き多様体)



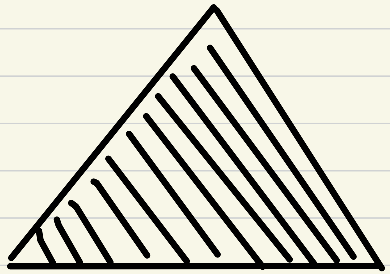


となるように定めたい。

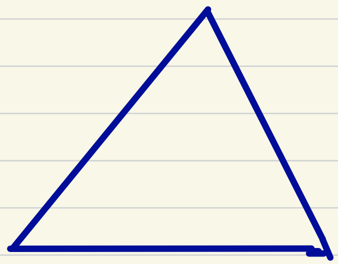
どのように定義すべきか？

Remark:

M



の境界を



(連結成分1つ)

にしてしまうと,

これはもはや角付き多様体ではなくなってしまう.

本講義では，境界は"面ごとに切り分ける"

内容

- 境界対称性の定義
- 境界対称性に誘導される何？

Section 12.1 : C_n における境界

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} C_n$

やる事 : U の境界 について 言葉を整理しておく

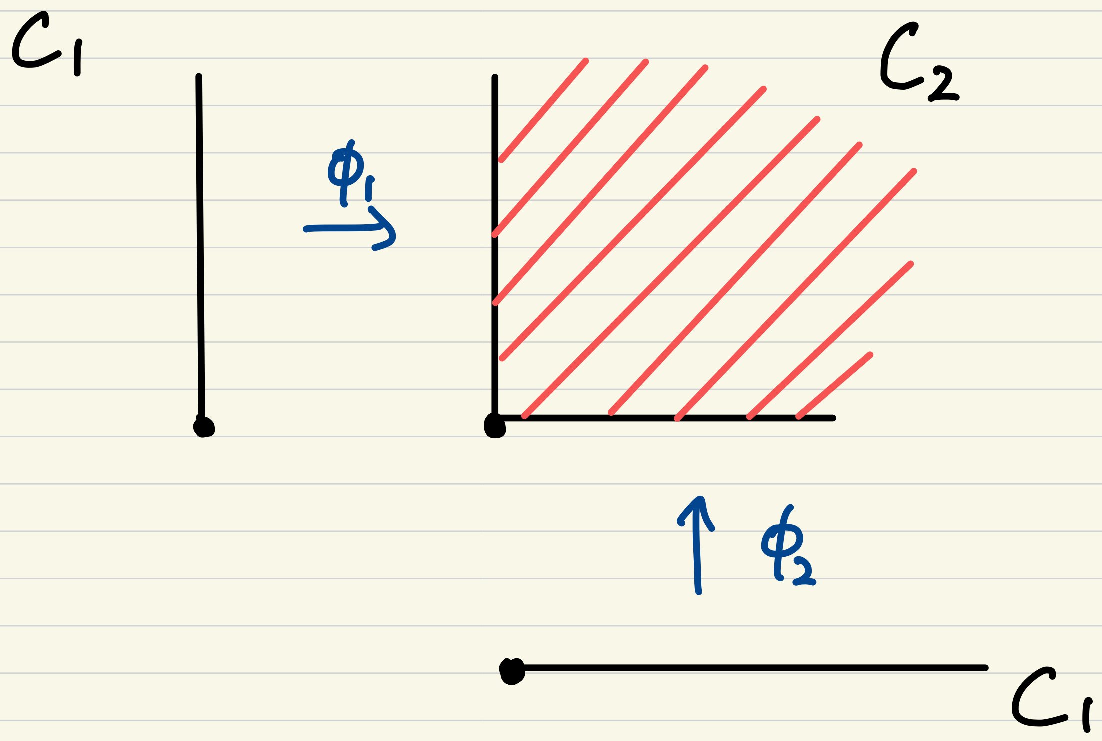
(※位相空間論の境界(閉包、内部)とは別もの)

記号 : $C_n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ (\forall i = 1, \cdots, n) \}$

$C_{n-1} := \{ y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid y_j \geq 0 \ (\forall j = 1, \cdots, n-1) \}$

Def 12.1.1 : 各 $s = 1, \cdots, n$ に対し

$\phi_s : C_{n-1} \to C_n$, $(y_1, \cdots, y_{n-1}) \mapsto (y_1, \cdots y_{s-1}, 0, y_s, \cdots y_{n-1})$



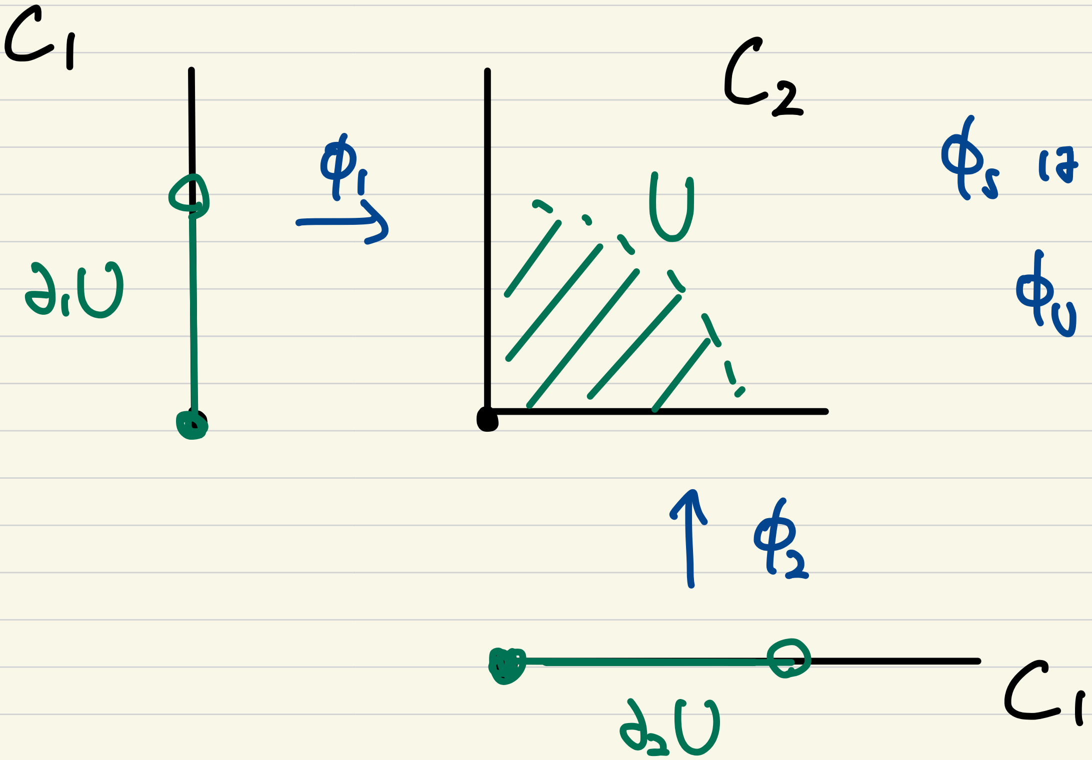
Def 12.1.2 各 $s = 1, \cdots, n$ について

$\partial_s U = \emptyset$ の場合もある.

$$\partial_s U := \phi_s^{-1}(U) \subset C_{n-1}$$ と定める

また $$\partial U := \coprod_{s=1}^{n} \partial_s U = \{ (s, u) \mid s = 1, \cdots, n,\ u \in \partial_s U \}$$

$$\phi_U : \partial U \to U,\quad (s, u) \mapsto \phi_s(u)$$ とおく.



ϕ_s はそれぞれ単射だが、

ϕ_U は単射とは限らない

Section 12.2 : 境界射影体の定義

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

$M = (M, \mathcal{A}_M)$: n-mfd with corners.

$\partial M = (\partial M, \mathcal{A}_{\partial M})$: $(n-1)$-mfd with corners

$b : \partial M \to M$: C^∞-map

Def 12.2.1 :

$(\partial M, b)$ が $M=(M, \mathcal{A}_M)$ の境界付多様体 (boundary mfd)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}(O, U, u) \in \mathcal{A}_M$,

$$\exists! \, \{(\partial_s O, \partial_s U, \partial_s u) \in \mathcal{A}_{\partial M}\}_{\substack{s=1,\cdots,n \\ \partial_s U \neq \emptyset}}$$

s.t.
$$\begin{cases} \displaystyle\bigsqcup_{\substack{s \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \partial_s O = b^{-1}(O) \\ \phi_s \circ \partial_s u = u \circ b \quad ({}^{\forall}s) \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "u"] & U \\
\partial_s O \arrow[u, "b"] \arrow[r, "\partial_s u"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & \partial_s U \arrow[u, "\phi_s"'] \arrow[d, phantom, "\cap" description] \\
b^{-1}(O) & \partial U
\end{tikzcd}$$

$\partial u := \bigsqcup_s \partial_s u : b^{-1}(O) \xrightarrow{\sim} \partial U$ と書く.

境界付多様体の十分条件

Prop 12.2.2 : $(\partial M, b)$ が以下の条件を満たすならば M は boundary mfd

条件 : ${}^{\exists}\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_M$: atlas

${}^{\forall}(O, U, u) \in \mathcal{A}_0$,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
{}^{\exists}\{(\partial_s O, \partial_s U, \partial_s u) \in \mathcal{A}_{\partial M}\}_{\substack{s=1,\cdots,n \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \\
\text{s.t.} \left\{
\begin{array}{l}
\bigsqcup_{\substack{s \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \partial_s O = b^{-1}(O) \\
\\
\phi_s \circ \partial_s u = u \circ b \quad ({}^{\forall}s)
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

★★

Prop 12.2.2 の証明は Section 12.4 へ

Ex 12.2.3 :

$$M$$

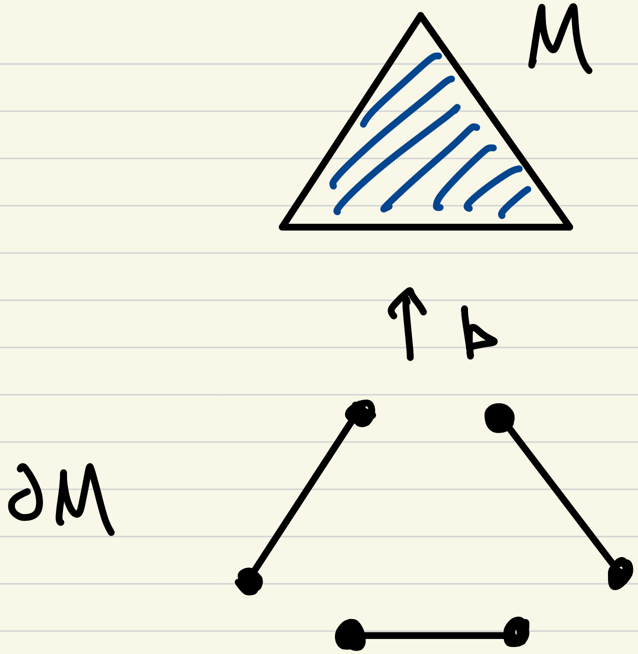
$$\uparrow b \qquad \text{は 境界付き多様体}$$

$$\partial M$$

Hint :

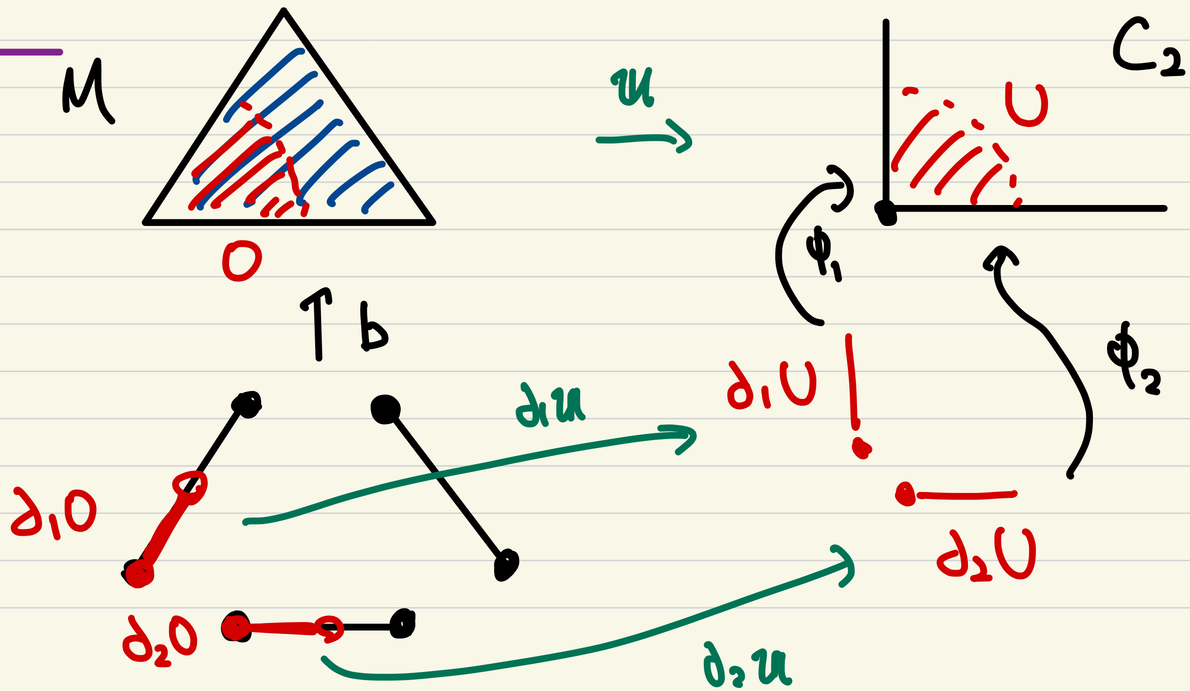
$$\begin{array}{ccc} M \supset O & \xrightarrow{u} & C_1 \supset U \\ \uparrow b & & \uparrow \phi_1 \\ \partial M \supset \partial_1 O = b^{-1}(O) & \xrightarrow{\partial u} & \partial_1 U \overset{\text{open}}{\subset} C_0 \end{array}$$

Ex 12.2.4:



b：边界对称体

Hint:



境界多様体の存在と一意性

Theorem 12.2.5 M の boundary mfd $(\partial M, b)$ は存在する.

Theorem 12.2.6 M の boundary mfd は次の意味で一意:

$(\partial^1 M, b^1)$, $(\partial^2 M, b^2)$ が共に M の boundary mfd

であるなら

$\exists ! \varphi : \partial^1 M \to \partial^2 M$: diffeo s.t. $b^1 = b^2 \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} & M & \\ \partial^1 M \arrow[ur, "b^1"] \arrow[rr, "\varphi"'] & \circlearrowleft & \partial^2 M \arrow[ul, "b^2"'] \end{tikzcd}$$

証明は Section 12.4 で行う.

Section 12.3 : 境界多様体 1: 誘導される向き.

設定:

$M = (M, \mathcal{A}_M)$: n-mfd with corners

$\sigma : \mathcal{A}_M^{\mathrm{conn}} \to \{\pm 1\}$: M の向き

$(\partial M, b)$: boundary mfd of M

$\| $

$(\partial M, \mathcal{A}_{\partial M})$

目標: M の向き σ から ∂M の向き $\partial\sigma$ を誘導する.

σ により誘導された ∂M の向き

Theorem 12.3.1 修

∂M の向き $\partial\sigma : \mathcal{A}^{conn}_{\partial M} \to \{\pm 1\}$ であって以下の条件を満たすものが一意に存在する.

条件: $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}^{conn}_{M}$, $\forall s = 1, \cdots, n$ with $\partial_s U \neq \emptyset$

$\forall (\partial_s U)_0$: $\partial_s U$ の連結成分 ($\rightsquigarrow$ $(\partial_s O, \partial_s U, \partial_s u) \in \mathcal{A}_{\partial M}$)

$$\sigma_u = (-1)^s \, \partial\sigma_{(\partial_s u)_0}$$

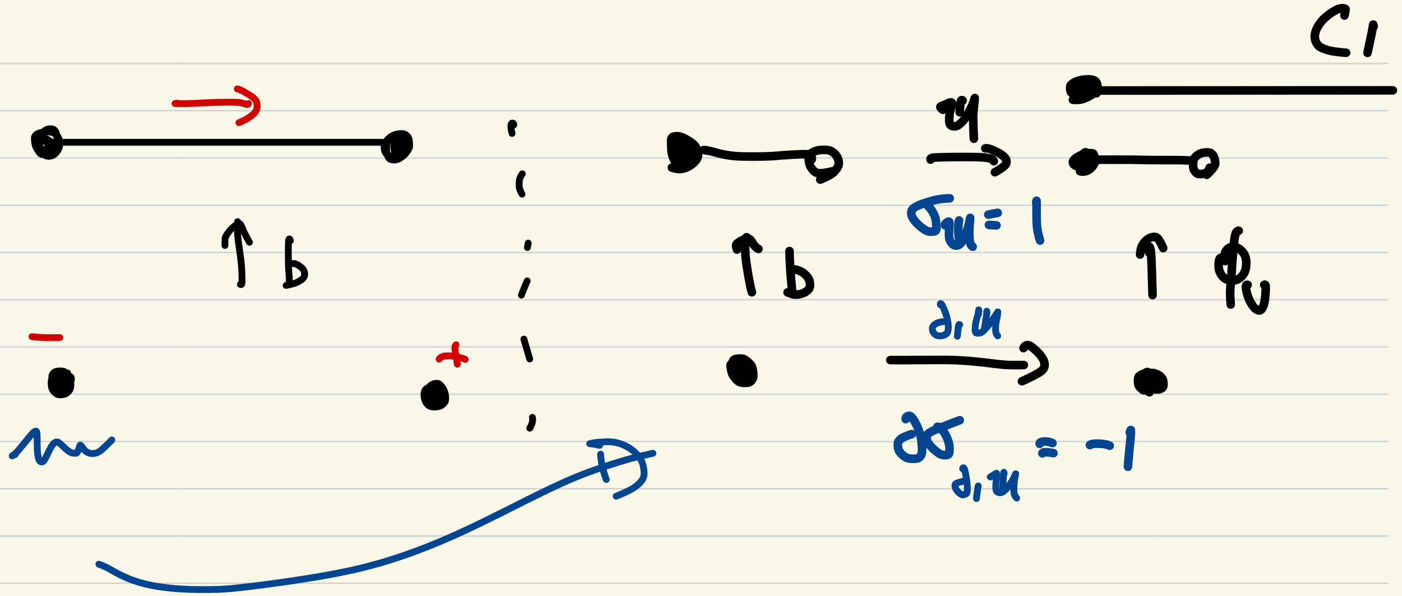
ただし $(\partial_s O)_0 := (\partial_s u)^{-1}((\partial_s U)_0)$

$$(\partial_s u)_0 : (\partial_s O)_0 \xrightarrow{\sim} (\partial_s U)_0$$

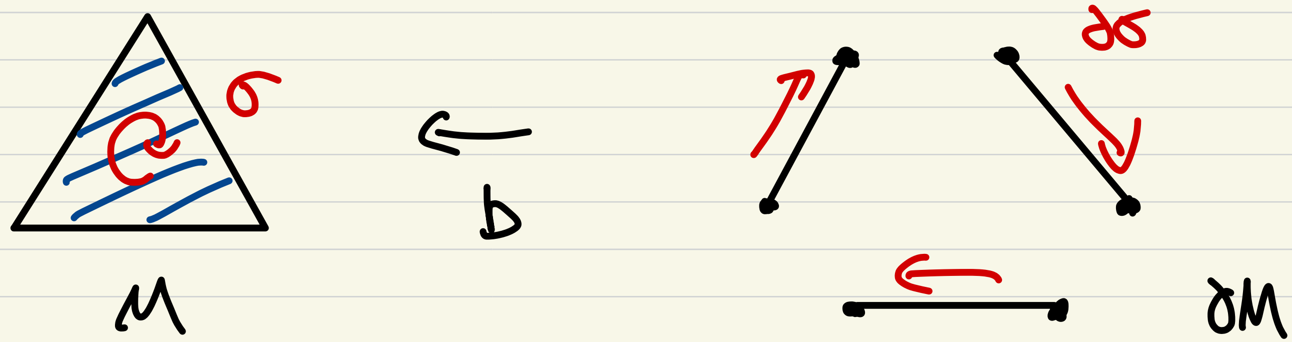
$$((\partial_s O)_0, (\partial_s U)_0, (\partial_s u)_0) \in \mathcal{A}^{conn}_{\partial M}$$

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "u"] & U \\
\partial_s O \arrow[u, "b"] \arrow[r, "\partial_s u"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] & \partial_s U \arrow[u, "\phi_s"'] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] \\
b^{-1}(0) & \partial U
\end{tikzcd}$$

Ex 12.3.2 :



Ex 12.3.3 :



Section 12.4：各種定理の証明について

Prop 12.2.2，Thm 12.2.5，12.2.6

およびThm 12.3.1を示す．

Section 12.4.1：C_nの境界についての準備

Section 12.4.2：Prop 12.2.2

Section 12.4.3：Thm 12.2.5

Section 12.4.4：Thm 12.2.6

Section 12.4.5：Thm 12.3.1

Section 12.4.1 : C_n の境界についての準備

設定 : $\emptyset \neq U \underset{\text{open}}{\subset} C_n$

記号

$\phi_s : C_{n-1} \to C_n \ , \ (y_1 \cdots y_{n-1}) \mapsto (y_1, \cdots, y_{s-1}, 0, y_s, \cdots, y_{n-1})$

$\partial_s U := \phi_s^{-1}(U) \underset{\text{open}}{\subset} C_{n-1}$ $\quad (s = 1, \cdots, n)$

$\partial U := \coprod_{s=1}^{n} \partial_s U$

$\phi_U = \coprod_{s=1}^{n} \phi_s|_{\partial_s U} : \partial U \to U$

Prop 12.4.1.1 : X を位相空間, $f : X \to U$ を連続写像とする.

(i) 各 $s = 1, \cdots, n$ について

$\partial_s f : X \to \partial_s U$: 同相写像 s.t. $f = \phi_s \circ \partial_s f$

は存在するなら一意.

$$\begin{tikzcd} & U \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\partial_s f"'] & \partial_s U \arrow[u, "\phi_s"'] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] \end{tikzcd}$$

(ii) $\partial f : X \to \partial U$: 同相写像 s.t. $f = \phi_U \circ \partial f$

は存在するなら一意.

$$\begin{tikzcd} & U \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\partial f"'] & \partial U \arrow[u, "\phi_U"'] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] \end{tikzcd}$$

Hint: (i) は ϕ_s の単射性から明らか

(ii) は ∂U のある open dense 部分集合上で

ϕ_U が単射であることを使う

設定 $U, U' \subset C_n$, ~~$\forall s = 1, \dots, n$.~~
$\quad\ \neq\emptyset \ \ \neq\emptyset$ open

$\tau : U \to U'$: diffeo

Proposition 12.4.1.2

$\exists! \, \partial\tau : \partial U \to \partial U'$: diffeo

s.t. $\phi_{U'} \circ \partial\tau = \tau \circ \phi_U$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\tau"] & U' \\ \partial U \arrow[u, "\phi_U"] \arrow[r, "\partial\tau"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \partial U' \arrow[u, "\phi_{U'}"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 12.4.1.3 $s = 1, \cdots, n$ を固定し、

$p \in \partial_s U$ とする。

$s'_p = 1, \cdots, n$ を $(\partial \tau)(p) \in \partial_{s'_p} U'$

となるものとする。

(i) $\det J_{\phi_s(p)} \tau > 0$ のとき

$$\det J_p(\partial \tau) > 0 \iff (-1)^s = (-1)^{s'_p}$$

(ii) $\det J_{\phi_s(p)} \tau < 0$ のとき

$$\det J_p(\partial \tau) > 0 \iff (-1)^s \neq (-1)^{s'_p}$$

Section 12.4.2 : Prop 12.2.2 の証明

設定： $M = (M, \mathcal{A}_M)$: n-mfd w.c.

$\partial M = (\partial M, \mathcal{A}_{\partial M})$: $(n-1)$-mfd w.c.

$b : \partial M \to M$: C^∞-map

再掲： Prop 12.2.2 : $(\partial M, b)$ が以下の条件を満たすならば M は boundary mfd

条件 : $^\exists \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_M$: atlas

$^\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$,

(★★) $\left\{ \begin{array}{l} ^\exists \{(\partial_s O, \partial_s U, \partial_s u) \in \mathcal{A}_{\partial M}\}_{\substack{s=1,\cdots,n \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \\ \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} \bigsqcup_{\substack{s \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \partial_s O = b^{-1}(O) \\ \phi_s \circ \partial_s u = u \circ b \quad (^\forall s) \end{array} \right. \end{array} \right.$

Hint : 以下に述べる Lemma 12.4.2.1 〜 12.4.2.4 を用いると示せる.

Lemma 12.4.2.1 : $(O, U, u) \in \mathcal{A}_M$ とする.

次の2条件は同値

(i) (O, U, u) は ① in Def 12.2.1 を満たす

i.e.
$$\begin{cases} \exists ! \{(\partial_s O, \partial_s U, \partial_s u) \in \mathcal{A}_{\partial M}\}_{\substack{s=1,\cdots,n \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \\ \text{s.t.} \begin{cases} \bigsqcup_{\substack{s \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \partial_s O = b^{-1}(O) \\ \phi_s \circ \partial_s u = u \circ b \quad (\forall s) \end{cases} \end{cases}$$

(ii) (O, U, u) は ①' in Prop 12.2.2 を満たす

i.e.
$$\begin{cases} \exists \{(\partial_s O, \partial_s U, \partial_s u) \in \mathcal{A}_{\partial M}\}_{\substack{s=1,\cdots,n \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \\ \text{s.t.} \begin{cases} \bigsqcup_{\substack{s \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \partial_s O = b^{-1}(O) \\ \phi_s \circ \partial_s u = u \circ b \quad (\forall s) \end{cases} \end{cases}$$

(唯一性が条件から外れた)

Hint : Prop 12.4.1.1 を使う

Lemma 12.4.2.2 $^\forall(O, U, u) \in \mathcal{A}_M$ with ☆☆,

$^\forall O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$, $O_0 \neq \emptyset$

$(O_0, u(O_0), u|_{O_0}) \in \mathcal{A}_M$ は ☆☆ を満たす.

Hint: easy

Lemma 12.4.2.3: $\emptyset \neq O \underset{\text{open}}{\subset} M$ とし,

$(O, U_1, u_1), (O, U_2, u_2) \in \mathcal{A}_M$ とする.

このとき (O, U_1, u_1) が ☆☆ を満たすことと

(O, U_2, u_2) が ☆☆ を満たすことは同値

Hint: Prop 12.4.1.2 を使う

Lemma 12.4.2.4

$(O, U, u) \in \mathcal{A}_M$, $\mathcal{O} = \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: O の open cover とする.

このとき (O, U, u) が ☆☆ を満たすことと

任意の $\lambda \in \Lambda$ について $(O_\lambda, u(O_\lambda), u|_{O_\lambda}) \in \mathcal{A}_M$ が ☆☆

を満たすことは同値

Hint : 以下の一般論と Prop 12.4.1.1 を使う.

(diffeo の貼合わせ)

設定 : M, N : mfd with corners

Λ : 集合

$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: M の open cover

$\{O'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: N の open cover

Prop 12.4.2.5

各 $\lambda\in\Lambda$ について diffeo $\varphi_\lambda : O_\lambda \to O'_\lambda$ が定まっていて

以下の条件1,2を満たすとする.

条件1 : $\forall \lambda_1,\lambda_2 \in \Lambda$ with $O_{\lambda_1}\cap O_{\lambda_2}\neq\emptyset$, $\varphi_{\lambda_1}|_{O_{\lambda_1}\cap O_{\lambda_2}} = \varphi_{\lambda_2}|_{O_{\lambda_1}\cap O_{\lambda_2}}$

条件2 : $\forall \lambda_1,\lambda_2 \in \Lambda$ with $O'_{\lambda_1}\cap O'_{\lambda_2}\neq\emptyset$, $\varphi^{-1}_{\lambda_1}|_{O'_{\lambda_1}\cap O'_{\lambda_2}} = \varphi^{-1}_{\lambda_2}|_{O'_{\lambda_1}\cap O'_{\lambda_2}}$

このとき $\exists!\, \varphi : M \to N$: diffeo s.t. $\forall \lambda\in\Lambda$, $\varphi|_{O_\lambda} = \varphi_\lambda$

Section 12.4.3 : Theorem 12.2.5 の証明

設定 : $M = (M, \mathcal{A}_M)$: n-mfd with corners

再掲 : Thm 12.2.5 : M は boundary mfd を持つ

Step 1 : $(n-1)$-mfd ∂M と C^∞-map $b : \partial M \to M$ の構成

Step 2 : $(\partial M, b)$ が Prop 12.2.2 の条件を満たすことを示す.

Step 1 : $(n-1)$ - mfd ∂M と C^0- map $b : \partial M \to M$ の構成

一般論として多様体の貼り合わせ構成についての以下の定理を用いる.

設定 :
- $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
- Λ : 可算集合
- $\{ V_\lambda \underset{open}{\subset} C_m \}_{\lambda \in \Lambda}$: C_m の開集合の族 ($V_\lambda \neq \emptyset$)
- 各 $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ について

  $V^{\lambda_2}_{\lambda_1} \underset{open}{\subset} V_{\lambda_1}$, $V^{\lambda_1}_{\lambda_2} \underset{open}{\subset} V_{\lambda_2}$,

  diffeo $\theta_{\lambda_1, \lambda_2} : V^{\lambda_2}_{\lambda_1} \to V^{\lambda_1}_{\lambda_2}$ が定まっており

  "のりしろ" と "貼り合わせ"

$$\begin{cases} \forall \lambda \in \Lambda,\ V^{\lambda}_{\lambda} = V_\lambda,\quad \theta_{\lambda,\lambda} = id_{V_\lambda}, \\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda,\quad \theta_{\lambda_2,\lambda_1}^{-1} = \theta_{\lambda_1,\lambda_2} \end{cases}$$ とする.

記号： ・ $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ 上の同値関係 $\sim$ を

$(\lambda_1, v) \sim (\lambda_2, \theta_{\lambda_1\lambda_2}(v))$ $\left(\begin{array}{l}\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \\ v \in V_{\lambda_1}^{\lambda_2}\end{array}\right)$

の生成するものとする.

・また $N := \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda / \sim$ を商空間（商集合に商位相）

とし, $\pi : \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \to N$ を自然な射影とする.

Theorem 12.4.3.1：「$\forall \lambda \in \Lambda$, π は V_λ 上単射」であるとする.

このとき N はハウスドルフ, 第二可算 かつ

$A_0 := \{ (\pi(V_\lambda), V_\lambda, (\pi|_{V_\lambda})^{-1}) \mid \lambda \in \Lambda \}$ は N の C_m-atlas

特に $(N, [A_0])$ は m-mfd with corners.

Step 1 のつづき：

M がパラコンパクトになる（Section 10 appendix 参照）

$\mathcal{A}_M^0 \subset \mathcal{A}_M$: C^n-atlas であって可算なものが存在する。

$$\Lambda := \left\{ ((O, U, u), s) \;\middle|\; \begin{array}{l} (O, U, u) \in \mathcal{A}_M^0, \\ s = 1, \cdots, n \\ \partial_s U \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

とおくと

Λ は可算。

各 $\lambda = ((O, U, u), s) \in \Lambda$ について

$\emptyset \neq \partial_s U \underset{\text{open}}{\subset} C_{n-1}$.

この $\{\partial_s U\}_{\lambda = ((O, U, u), s) \in \Lambda}$ を

A_M° の座標変換の誘導する

貼り合わせ写像で貼り合わせると

(Thm 12.4.1.2) (詳細略)

$\partial M := \left(\bigsqcup_{\lambda} \partial_s U\right)/\sim$ (商位相) と

$\pi : \bigsqcup_{\lambda} \partial_s U \twoheadrightarrow M$ が手に入る.

$\tilde{b} : \coprod_{\lambda} \partial_s U \to M$, $\quad (\lambda, y) \mapsto u^{-1}(\phi_s(y))$ とおく.

$\lambda = ((O, U, u), s)$

Claim $\tilde{b}$ は ∂M を factor する.

i.e. $\exists !\, b : \partial M \to M$ s.t. $b \circ \pi = \tilde{b}$

$$\begin{tikzcd}
\coprod \partial_s U \arrow[r, "\tilde{b}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \\
\partial M \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}$$

Hint: 貼り合わせの定義から分かる.

(Thm 12.4.1.2 を使っていることに注意.)

Claim $\forall \lambda \in \Lambda$, π は $\partial_s U$ 上単射

Hint: $\tilde{b}$ は $\partial_s U$ 上単射であることと上の可換図式から従う

Thm 12.4.3.1 より

$$\mathcal{A}^{\circ}_{\partial M} := \{ (\pi(\partial_s U), \partial_s U, (\pi|_{\partial_s U})^{-1}) \mid \lambda = ((0, U, u), s) \in \Lambda \}$$

は ∂M の C_{n-1}-atlas を定め、

$(\partial M, [\mathcal{A}^{\circ}_{\partial M}])$ は $(n-1)$-mfd w.c. となる。

$b : \partial M \to M$ が C^∞ であることは easy

（本質的には $\tilde{b} : \coprod_\lambda \partial_s U \to M$ が C^∞ であることから従う）

Step 1 終

Step 2 : $(\partial M, b)$ が Prop 12.2.2 の条件を満たすことを示す.

$\partial M = (\partial M, [\mathcal{A}^{\circ}_{\partial M}])$ と考えている.

C_{n-1}-atlas として

$$\mathcal{A}^{\circ}_{\partial M} = \{ (\pi(\partial_s U), \partial_s U, (\pi|_{\partial_s U})^{-1}) \mid \lambda = ((0, U, u), s) \in \Lambda \}$$

をとれば Prop 12.2.2 の条件が check できる.

Step 2 終

Section 12.4.4 : Thm 12.2.6 の証明

設定 : $M = (M, \mathcal{A}_M)$: n-mfd w.c.

再掲 : Theorem 12.2.6　M の boundary mfd は次の意味で一意 :

$(\partial^1 M, b^1)$, $(\partial^2 M, b^2)$ が共に M の boundary mfd

であるならば

$\exists! \varphi : \partial^1 M \to \partial^2 M$: diffeo s.t. $b^1 = b^2 \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} & M & \\ \partial^1 M \arrow[ur, "b^1"] \arrow[rr, "\varphi"'] & \circlearrowleft & \partial^2 M \arrow[ul, "b^2"'] \end{tikzcd}$$

Step 1 : φ の構成

Step 2 : φ の一意性

$$\begin{tikzcd}
 & O \arrow[d, "u"] & \\
 & U & \\
(b^1)^{-1}(O) \arrow[r, "\partial^1 u"'] \arrow[uur, "b^1"] & \partial U \arrow[u, "\Phi_U"] & (b^2)^{-1}(O) \arrow[l, "\partial^2 u"] \arrow[uul, "b^2"']
\end{tikzcd}$$

Step 1 : φ の構成

各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}_M$ について

$$\varphi_O := \left((\partial^2 u)^{-1} \circ \partial^1 u \right) : (b^1)^{-1}(O) \to (b^2)^{-1}(O) : \text{diffeo}$$

を考えると、

Prop 12.4.2.5 より $\varphi : \partial^1 M \to \partial^2 M$ が構成される。

with $b^1 = b^2 \circ \varphi$

(詳細略)

Step 2 : φ の一意性

Prop 12.4.1.1 を使うと分かる (詳細略)

Section 12.4.5 : Thm 12.3.1 の証明 修

設定 : $M = (M, \mathcal{A}_M)$: n-mfd w.c.

$(\partial M, b)$: M の boundary mfd.

$\parallel$

$(\partial M, \mathcal{A}_{\partial M})$

再掲 : Theorem 12.3.1　∂M の向き付け : $\mathcal{A}_{\partial M}^{conn} \to \pm 1$ であって以下の条件を満たすものが一意に存在する.

条件 : $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_M^{conn}$, $\forall s = 1, \cdots, n$ with $\partial_s U \neq \emptyset$

$\forall (\partial_s U)_0$: $\partial_s U$ の連結成分

$$\sigma_u = (-1)^{s+1} \partial\sigma_{(\partial_s u)_0}$$

ただし $(\partial_s O)_0 := (\partial_s u)^{-1}((\partial_s U)_0)$

$(\partial_s u)_0 : (\partial_s O)_0 \xrightarrow{\sim} (\partial_s U)_0$

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "u"] & U \\
b^{-1}(O) \arrow[u, "b"] \arrow[r, "\partial u"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \partial U \arrow[u, "\phi_U"'] \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
\coprod_{s=1}^{n} \partial_s O & \coprod_{s=1}^{n} \partial_s U
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{A}^{\circ}_{\partial M} := \left\{ ((\partial_s O)_0, (\partial_s U)_0, (\partial_s u)_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} (O, U, u) \in \mathcal{A}^{\mathrm{conn}}_M,\ s = 1, \dots, n \text{ with } \partial_s U \neq \emptyset \\ (\partial_s U)_0 : \partial_s U \text{ の連結成分} \end{array} \right\} \subset \mathcal{A}^{\mathrm{conn}}_{\partial M}$$

は ∂M の C_{n-1}-atlas である.

Thm 9.1.5 より

$\partial\sigma : \mathcal{A}^{\circ}_{\partial M} \to \{\pm 1\},$

$((\partial_s O)_0, (\partial_s U)_0, (\partial_s u)_0) \mapsto (-1)^s \sigma_u$

としたとき Def 9.1.3 の条件 ⊛ を満たすことを示せば十分.

これは Prop 12.4.1.3 から check できる.

(詳細略)