Section 13 : Stokes' theorem

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners

σ : M の向き

$(\partial M, b)$: M の boundary mfd ← $(n-1)$-mfd w.c.

記号 : $\partial\sigma$: σ の誘導する ∂M の向き (Section 12)

この節のゴール : Stokes' theorem

$$\forall \omega \in \Lambda^{n-1}_c(M), \quad \int_{(M,\sigma)} d\omega = \int_{(\partial M, \partial\sigma)} \omega$$

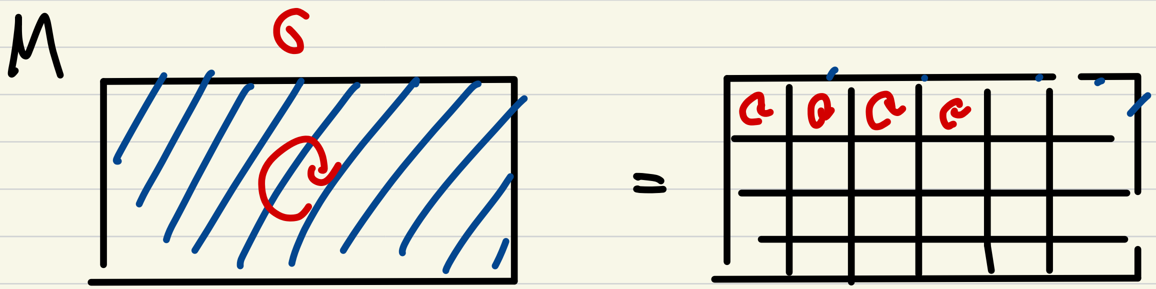
外微分

この節のゴール : Stokes' theorem

$$\forall \omega \in \Omega_c^{n-1}(M),\quad \int_{(M,\sigma)} d\omega = \int_{(\partial M,\, \partial\sigma)} \omega$$

外微分

気持ち



$$\int_{(M,\sigma)} d\omega = \sum_{\square} d\omega(\square)$$

$$= \sum_{\square} \omega(\square) = \omega\left(\overset{\partial M}{\square}\right) = \int_{(\partial M,\partial\sigma)} \omega$$

外微分の気持ち

Section 13.1 : 微分形式の引き戻し

設定 : $M_i = (M_i, A_{M_i})$: n_i - mfd with corners $(i=1,2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞ - map

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 : $\Omega^k(M_i)$: M_i 上の k - form 全体のなす $C^\infty(M_i)$ 加群

$\cup$

$\Omega^k_c(M_i)$: M_i 上の support compact k - form 全体のなす $C^\infty(M_i)$ 加群

Def 13.1.1: 各 $\omega \in \Omega^k(M_2) \cong \Gamma(\bigwedge^k T^\vee M_2)$ について

$\varphi^*\omega : M_1 \to \bigwedge^k T^\vee M_1,\ p \mapsto (p, (\varphi^*\omega)_p)$ を

φ による ω の引き戻し

各 $p \in M_1$ において

$$(\varphi^*\omega)_p(v_1, \cdots, v_k) = \omega_{\varphi(p)}((d\varphi)_p v_1, \cdots, (d\varphi)_p v_k)$$

$(v_1, \cdots, v_k \in T_pM_1)$

として定める.

Prop 13.1.2: 各 $p \in M_1$ について $(\varphi^*\omega)_p \in \bigwedge^k T^\vee M_1$

は well-defined.

また $\varphi^*\omega \in \Gamma(\bigwedge^k T^\vee M_1) \cong \Omega^k(M_1)$

Def 13.1.3 : $\varphi^*: \Lambda^k(M_2) \to \Lambda^k(M_1)$, $\omega \mapsto \varphi^*\omega$ とおく.

Prop 13.1.4 : $\varphi^*: \Lambda^k(M_2) \to \Lambda^k(M_1)$ は線型.

また 各 $f \in C^\infty(M_2)$, $\omega \in \Lambda^k(M_2)$ について

$$\varphi^*(f\omega) = \underbrace{(\varphi^* f)}_{= f\circ\varphi \in C^\infty(M_1)}(\varphi^*\omega)$$

Theorem 13.1.5：引き戻しは微分形式の外積を保つ

$$\left(\begin{array}{l} \text{i.e.} \quad \forall \omega_1 \in \Lambda^k(M_2),\ \omega_2 \in \Lambda^l(M_2) \\ \qquad \varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2) \end{array} \right)$$

Hint：以下の Proposition から従う

V, W：有限次元ベクトル空間

$\iota : V \to W$：線型写像 とする.

Def. 13.1.6：各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$$\iota^* : \bigwedge^k W^\vee \to \bigwedge^k V^\vee,\quad \omega \mapsto \iota^*\omega : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k} \to \mathbb{R}$$

$$(v_1, \cdots, v_k) \mapsto \omega(\iota v_1, \cdots, \iota v_k)$$

Prop 13.1.7：ι^* は well-defined，線型，
交代形式の外積を保つ.

Theorem 13.1.8 : 引き戻しは外微分と可換

i.e.
$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^{k+1}(M_2) \arrow[r, "\varphi^*"] & \Lambda^{k+1}(M) \\
\Lambda^{k}(M_2) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[u, "d"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \Lambda^{k}(M_1) \arrow[u, "d"]
\end{tikzcd}
$$

証明のアイデアを紹介する:

Lemma 13.1.9 : $C^\infty(M_2) \cong \Lambda^0(M_2)$ 上で引き戻しは外微分と可換

Hint :

$$(\varphi^*(df))_p(v) = (df)_{\varphi(p)}((d\varphi)_p v)$$

$$(d(\varphi^* f))_p(v) = v(\varphi^* f)$$

Proof of Thm 13.1.8　$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし $^\forall \omega \in \Omega^k(M_2)$ をとる.

示 $d(\varphi^* \omega) = \varphi^*(d\omega)$

$^\forall (O, U, x) \in \mathcal{A}_{M_2}$ をとる

以下を示せば良い

示 $(d(\varphi^* \omega))|_{\varphi^{-1}(O)} = (\varphi^*(d\omega))|_{\varphi^{-1}(O)}$

以下略

Hint: Cor 7.2.3, Thm 7.3.1, Thm 7.4.1,

Prop 13.1.4, Thm 13.1.5, Lemma 13.1.9 を用いる.

Prop 13.1.10: $\varphi : M_1 \to M_2$ が proper

(i.e. compact set の逆像が必ず compact)

ならば $\varphi^*(\Lambda^k_c(M_2)) \subset \Lambda^k_c(M_1)$

Hint: $\omega \in \Lambda^k(M_2)$ について

$$\operatorname{supp} \varphi^*\omega \subset \varphi^{-1}(\operatorname{supp} \omega)$$

を示せばよい

Section 13.2 : Stokes' theorem

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners $(n \geq 1)$

σ : M の向き

$(n-1)$-mfd w.c.

$(\partial M, b)$: M の boundary mfd

記号 : $\partial\sigma$: σ の誘導する ∂M の向き

Stokes' thm を述べるための準備

Prop 13.2.1 $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\forall \omega \in \Lambda_c^k(M)$

$$\operatorname{supp} d\omega \subset \operatorname{supp} \omega .$$

特に $d\omega \in \Lambda_c^{k+1}(M)$

Hint: Thm 7.2.4

Prop 13.2.2: $b : \partial M \to M$ は proper

Hint: $\underset{\neq \emptyset}{U} \underset{\text{open}}{\subset} C_n$ について

$\phi_U : \partial U \to U$ が proper であることと、

M が局所コンパクトであることを使う

Cor 13.2.3: $b^*(\Lambda_c^k(M)) \subset \Lambda_c^k(\partial M)$

(Prop 13.2.2 と Prop 13.1.10)

Theorem 13.2.4 (Stokes' theorem)

$\forall \omega \in \Lambda_c^{n-1}(M)$

$$\int_{(M,\sigma)} \underbrace{d\omega}_{\in \Lambda_c^n(M)} = \int_{(\partial M, \partial\sigma)} \underbrace{b^*(\omega)}_{\in \Lambda_c^{n-1}(\partial M)}$$

証明は Section 13.4 で述べる.

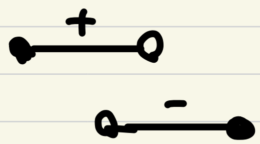
Cor 13.2.5: $\partial M = \emptyset$ ($\Leftrightarrow$ M が通常の意味の C^∞-mfd) のとき

$\forall \omega \in \Lambda_c^{n-1}(M)$, $\int_{(M,\sigma)} d\omega = 0$

($\emptyset$ は $n-1$ 次元向き付け可能多様体とみなすことにします…)

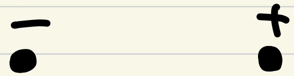
Ex 13.2.6 (微積分の基本定理)

$M :=$  $= [0,1]$ (1次元 mfd w.c.)

σ : 

(see Ex 12.3.2)

∂M : 

$\partial\sigma$: 

$f \in C^\infty(M) = C^\infty([0,1]) = \Omega^0([0,1])$ とする.

このとき $df = \underbrace{f'}_{f\text{の導関数}}dx$ ← $\Omega^1(M)$の元 なる

$$\int_0^1 f'dx = \int_{(M,\sigma)} df = \int_{(\partial M, \partial\sigma)} f = f(1) - f(0)$$

Stokes' の定理は微積分の基本定理の一般化

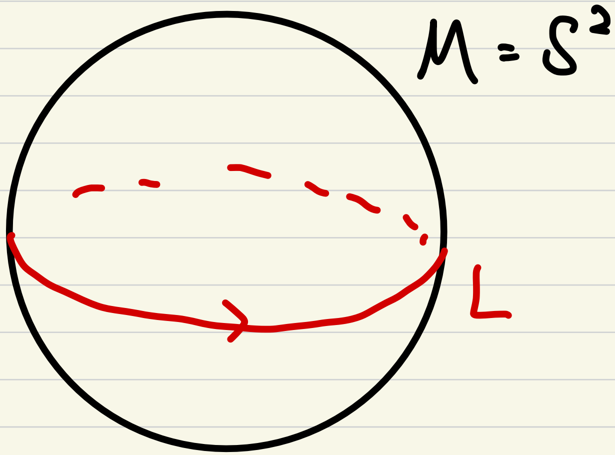
Section 13.3 : Stokes' thm の応用

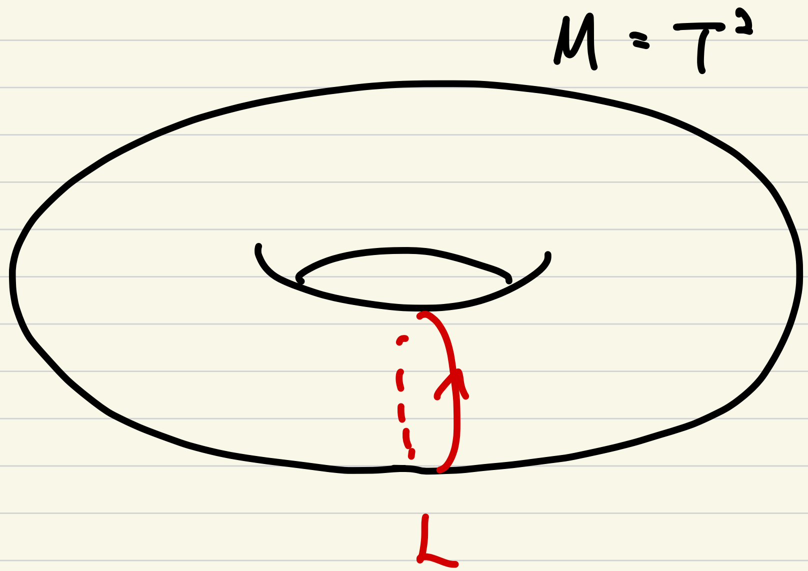
設定 : M : n-mfd with corners (向き付け不可能でもよい)

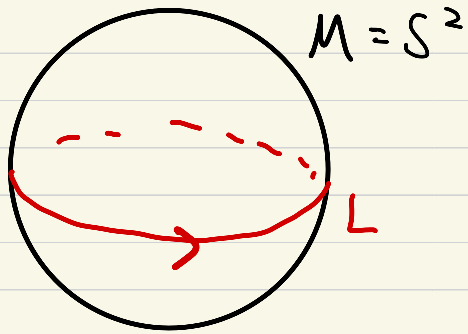
L : k-mfd with corners

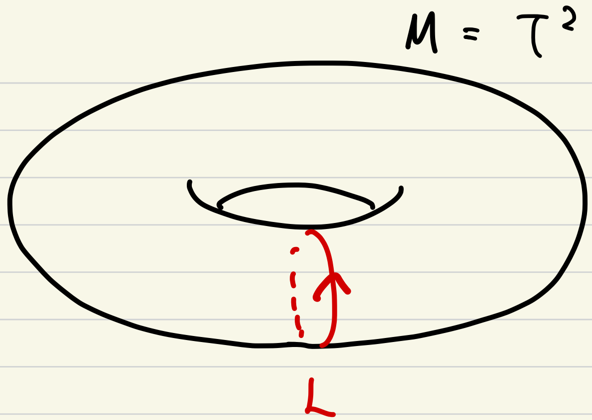
σ_L : L の向き

$\iota : L \to M$: proper C^∞-map









$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, "\hat{\iota}"] & \\ L \arrow[u, "b"] \arrow[r, "\iota"] & M \end{tikzcd}$$

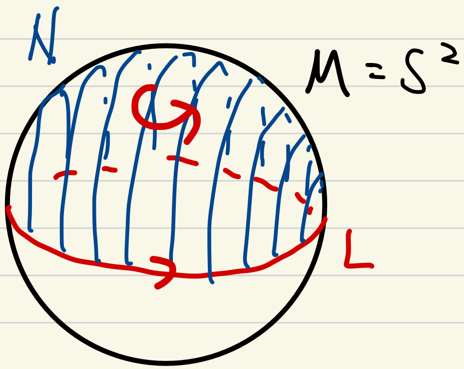
Q : $\exists$? N : $k+1$ - mfd w.c.

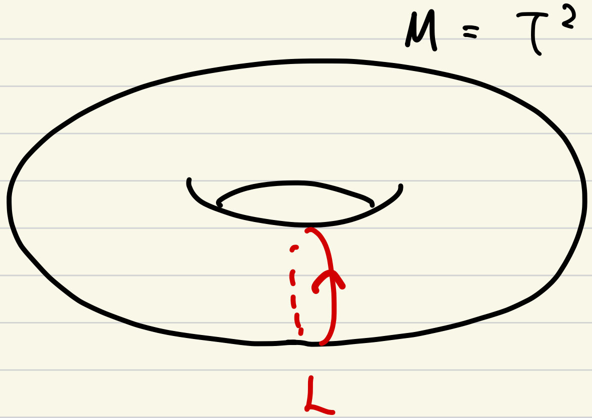
（ホモロジーの精神）

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_N : N \text{ の何か} \\ b : L \to N \\ \hat{\iota} : N \to M : \text{proper } C^\infty\text{-map} \end{array}\right.$$

s.t.

$$\left\{\begin{array}{l} (L, b) \text{ は } N \text{ の boundary} \\ \sigma_L \text{ は } \sigma_N \text{ の誘導する何か} \\ \iota = \hat{\iota} \circ b \end{array}\right.$$





N は存在しない

（どうやって示す？）

再掲：

設定：M : n-mfd with corners （向き付け不可能でもよい）

L : k-mfd with corners

σ_L : L の向き

$\iota : L \to M$: proper C^∞-map

Theorem 13.3.1 (Stokes' thm の応用)

仮定：$\exists\, \omega \in \Lambda_c^{k-1}(M)$ with $d\omega = 0$ s.t. $\displaystyle\int_{(L,\sigma_L)} \iota^*\omega \neq 0$

ホモロジー探知機　　検知！

主張：

$\nexists$ $\begin{cases} N : k+1\text{-mfd w.c.} \\ \sigma_N : N \text{ の向き} \\ b : L \to N \\ \hat{\iota} : N \to M : \text{proper } C^\infty\text{-map} \end{cases}$ s.t. $\begin{cases} (L, b) \text{ は } N \text{ の boundary} \\ \sigma_L \text{ は } \sigma_N \text{ の誘導する向き} \\ \iota = \hat{\iota} \circ b \end{cases}$

"L は M の非自明なホモロジー！"

⇝ de Rham 理論へ

Proof of Thm 13.3.1：対偶を示す.

$$\left\{\begin{array}{ll} N & : k+1\text{-mfd w.c.} \\ \sigma_N & : N \text{ の向き} \\ b & : L \to N \\ \hat{\imath} & : N \to M : \text{proper } C^\infty\text{-map} \end{array}\right. \quad \text{s.t.} \quad \left\{\begin{array}{l} (L, b) \text{ は } N \text{ の boundary} \\ \sigma_L \text{ は } \sigma_N \text{ の誘導する向き} \\ \imath = \hat{\imath} \circ b \end{array}\right.$$

が存在するとする.

示 $\forall \omega \in \Lambda_c^{k-1}(M)$ with $d\omega = 0$, $\displaystyle\int_{(L,\sigma_L)} \imath^* \omega = 0$

$\forall \omega \in \Lambda_c^{k-1}(M)$ with $d\omega = 0$ をとる.

示 $\displaystyle\int_{(L,\sigma_L)} \imath^* \omega = 0$

$\int_{(N,\sigma_N)} d\tilde{\imath}^*\omega$ を2通りの方法で計算する：

① $\displaystyle\int_{(N,\sigma_N)} d(\tilde{\imath}^*\omega) = \int_{(L,\sigma_L)} b^*(\tilde{\imath}^*\omega) = \int_{(L,\sigma_L)} \imath^*\omega$

(☺ Stokes' thm (Thm 13.2.4) (L,σ_L) は (N,σ_N) の boundary) (☺ $\tilde{\imath}\circ b = \imath$)

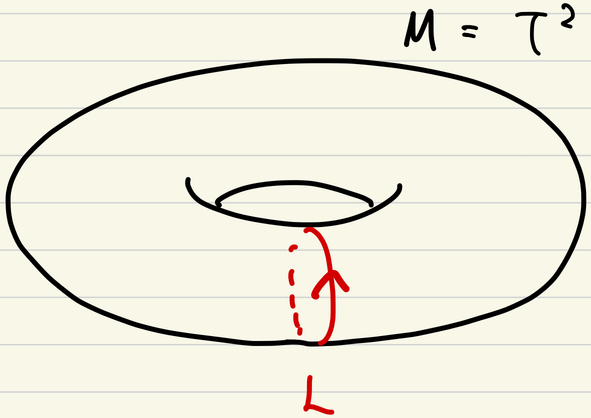
② $\displaystyle\int_{(N,\sigma_N)} d(\tilde{\imath}^*\omega) = \int_{(N,\sigma_N)} \tilde{\imath}^*(d\omega) = 0$

(☺ Thm 13.1.8) (☺ $d\omega = 0$)

ゆえに $\displaystyle\int_{(L,\sigma_L)} \imath^*\omega = 0$

∎

Example 13.3.2 :



$T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$

$L = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$

$\iota : L \to T^2, \ [x] \mapsto [x, 0]$

$\omega := dx \in \Omega^1(T^2)$ について

注意必要（$\mathbb{R}^2$ 上で定義したものを T^2 に落とした）

$d\omega = 0$ かつ $\displaystyle\int_{(L, \sigma_L)} \omega = \int_0^1 dx = 1 \neq 0$

$\rightsquigarrow$ L は T^2 の非自明ホモロジー！

Section 13.4: Stokes' theorem の証明

Theorem 13.2.4 を示す.

設定: $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners $(n \geq 1)$

σ : M の向き

$(\partial M, b)$: M の boundary mfd ← $(n-1)$-mfd w.c.

記号: $\partial\sigma$: σ の誘導する ∂M の向き

再掲: Theorem 13.2.4 (Stokes' theorem)

$\forall \omega \in \mathcal{A}_c^{n-1}(M)$

$$\int_{(M,\sigma)} \underbrace{d\omega}_{\in \mathcal{A}_c^n(M)} = \int_{(\partial M, \partial\sigma)} \underbrace{b^*(\omega)}_{\mathcal{A}_c^{n-1}(\partial M)}$$

キーポイント: "一変数関数の微積分の基本定理" を用いる

(cf. Ex 13.2.6)

Lemma 13.4.1 : $\underset{\phi \neq}{U} \underset{\text{open}}{\subset} C_n$, $y \in C_c^\infty(U)$ とする.

例

このとき $\forall s = 1, \cdots, n$,

$\underbrace{\frac{\partial y}{\partial u_s}}_{\in C_c^\infty(U)}$ の U における リーマン積分

$= (-1) \cdot (\underbrace{\phi_s^* y}_{\in C_c^\infty(\partial_s U)}$ の $\partial_s U$ における リーマン積分 $)$

$\phi_s : C_{n-1} \to C_n$

$(y_1 \cdots y_{n-1}) \mapsto (y_1 \cdots y_{s-1}, 0, y_s, \cdots, y_{n-1})$

$\partial_s U := \phi_s^{-1}(U)$

Proof of Lemma 13.4.1 :

$$\tilde{y} : C_n \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \begin{cases} y(u) & (\text{if } u \in U) \\ 0 & (\text{if } u \notin U) \end{cases}$$

とおく. $\operatorname{supp} y \subset U$ に注意すると, $\tilde{y} \in C_c^\infty(C_n)$.

$$\left.\frac{\partial \tilde{y}}{\partial u_s}\right|_U = \frac{\partial y}{\partial u_s} \quad \text{より}$$

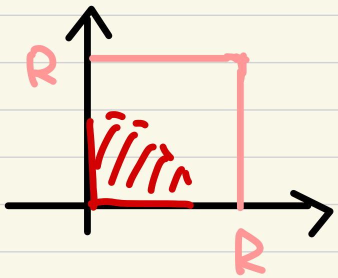
$\operatorname{supp} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial u_s} = \operatorname{supp} \frac{\partial y}{\partial u_s} \subset \operatorname{supp} y = \operatorname{supp} \tilde{y}$ に注意する.

$\operatorname{supp} \tilde{y} = \operatorname{supp} y \subset C_n \subset \mathbb{R}^n$ はコンパクトなので

$R > 0$ s.t. $\operatorname{supp} \tilde{y} \subset [0, R]^n$ となる R がとれる.

これより $\tilde{y}(u_1, \cdots, u_n) = 0$ if $u_i = R$ $({}^{\exists} i = 1, \cdots, n)$

に注意.



$\operatorname{supp} \tilde{y} \supset \operatorname{supp} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial u_s}$

リーマン積分の定義とフビニの定理から
(重積分) (重積分 = 累次積分 (順番自由))

$$\frac{\partial g}{\partial u_s} \text{ の } U \text{ における リーマン積分} = \int_{u_1=0}^{R} \cdots \overset{s}{\vee} \cdots \int_{u_n=0}^{R} \int_{u_s=0}^{R} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u_s}(u_1 \cdots u_n)\, du_s\, du_n \cdots \overset{s}{\vee} \cdots du_1$$

$$= (-1) \cdot \int_{u_1=0}^{R} \cdots \overset{s}{\vee} \cdots \int_{u_n=0}^{R} \tilde{g}(u_1 \cdots u_{s-1}, 0, u_{s+1} \cdots u_n)\, du_n \cdots \overset{s}{\vee} \cdots du_1$$

(∵ 微積分の基本定理
& $\tilde{g}(u_1 \cdots u_{s-1}\, R\, u_{s+1} \cdots u_n) = 0$)

$\phi_s : C_{n-1} \to C_n$
$(y_1 \cdots y_{n-1}) \mapsto (y_1 \cdots y_{s-1}, 0, y_s, \cdots, y_{n-1})$

$$= (-1) \cdot \int_{y_1=0}^{R} \cdots \int_{y_{n-1}=0}^{R} (\phi_s^* \tilde{g})(y_1, \cdots, y_{n-1})\, dy_1 \cdots dy_{n-1}$$

$= (-1)(\phi_s^* g$ の $\partial_s U$ における リーマン積分$)$ ▨

"support が十分小さい" 場合に Thm 13.2.2 の主張を示す.

Lemma 13.4.2 : $^{\forall}(O, U, u) \in \mathcal{A}^{conn}$

$\forall \omega \in \Lambda_c^{n-1}(M; O)$, ($\mathrm{supp}\,\omega \subset O$)

$$\int_{(M,\sigma)} d\omega = \int_{(\partial M, \partial\sigma)} b^* \omega$$

Proof of Lemma 13.4.2 : 係

$^{\forall}(O, U, u) \in \mathcal{A}^{conn}$, $^{\forall}\omega \in \Lambda_c^{n-1}(M; O)$ をとる.

簡単のため各 $s = 1, \cdots, n$ with $\partial_s U \neq \emptyset$ について

$\partial_s U$ は連結 ($\Leftrightarrow$ 弧状連結) であるとする.

(非連結な場合には連結成分のレベルで記述する必要がある)

$\exists !\ \{g_s^\omega \in C_c^\infty(O)\}_{s=1,\cdots,n}$ s.t. ← 記号の乱用

$$\omega|_O = \sum_{s=1}^{n} g_s^\omega \, du_1 \wedge \cdots \wedge \underset{\widehat{du_s}}{\cdots} \wedge du_n$$ に注意する.

① $\int_{(M,\sigma)} d\omega$ の計算

まず Thm 7.2.4 より

$$d\omega|_O = \left(\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} \frac{\partial g_s^\omega}{\partial u_s}\right) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$$

$\mathrm{supp}\, d\omega \subset \mathrm{supp}\, \omega \subset O$ より $d\omega \in \Lambda_c^n(M;O)$ であることから

$$\int_{(M,\sigma)} d\omega = \int_{(O,\sigma_M)} d\omega \quad (\because \text{Thm } 11.4.1)$$

$$= I_{(U,\sigma_U)}\left((u^{-1})^*\left(\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} \frac{\partial g_s^\omega}{\partial u_s}\right)\right)$$

ここで各 s について $g^{\omega}_{s,U} := (\psi^{-1})^* g^{\omega}_s \in C^{\infty}_c(U)$ とおけば

$$(\psi^{-1})^*\left(\frac{\partial g^{\omega}_s}{\partial u_s}\right) = \frac{\partial g^{\omega}_{s,U}}{\partial u_s}$$ であり

$$I_{(U,\sigma_u)}\left((\psi^{-1})^*\left(\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}\frac{\partial g^{\omega}_s}{\partial u_s}\right)\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1} I_{(U,\sigma_u)}\left(\frac{\partial g^{\omega}_{s,U}}{\partial u_s}\right)$$

$$= \sum_{\substack{s \\ \partial_s U \neq \emptyset}} (-1)^s I_{(\partial_s U,\sigma_u)}\left(\phi_s^* g^{\omega}_{s,U}\right) \quad (\because \text{Lemma 13.4.1})$$

$$= \sum_{\substack{s \\ \partial_s U \neq \emptyset}} I_{(\partial_s U,(-1)^s\sigma_u)}\left(\phi_s^* g^{\omega}_{s,U}\right)$$

② $\int_{(\partial M, \partial\sigma)} b^* \omega$ の計算

boundary mfd の定義 (Def 12.2.1) より

$\{(\partial_s O, \partial_s U, \underbrace{\psi^s}_{=\partial_s u}) \in \mathcal{A}_{\partial M}\}_{\substack{s=1,\dots,n \\ \partial_s U \neq \emptyset}}$ であって

$$
\begin{cases}
\bigsqcup_{\substack{s \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \partial_s O = b^{-1}(O) \\
\phi_s \circ \psi^s = u \circ b \quad (\forall s)
\end{cases}
$$

を満たすものが一意にとれる.

$$
\boxed{
\begin{array}{ccccc}
 & & O & \xrightarrow[\sim]{u} & U \\
 & & \uparrow b & & \uparrow \phi_U \\
\partial M \underset{\text{open}}{\supset} b^{-1}(O) = & \bigsqcup_s \partial_s O & \xrightarrow[\sim]{\sqcup_s \psi^s} & \bigsqcup_s \partial_s U &
\end{array}
}
$$

$\partial_s U \neq \emptyset$ となる s について

$\partial_s U$ は連結と仮定していたので $\partial_s O$ も連結.

Thm 12.3.1 より $\quad \partial \sigma_{y_s} = (-1)^s \sigma_{x}$.

また 各 s with $\partial_s U \neq \emptyset$ について

$b_s^* \omega \in \Lambda_c^{n-1}(\partial M ; \partial_s O)$ を 各 $p \in \partial M$ について

$$(b_s^* \omega)_p = \begin{cases} (b^* \omega)_p & \text{if } p \in \partial_s O \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

として定める. (詳細略 : $b^{-1}(O) = \bigsqcup_s \partial_s O$ を使う)

このとき $\quad b^* \omega = \sum_s b_s^* \omega$

更に 各 s with $\partial_s U \neq \emptyset$ について

$$b_s := b|_{\partial_s O} : \partial_s O \to O \subset M$$ とおくと

$$b_s^* u_i = \begin{cases} y_i^s & (i = 1, \cdots, s-1) \\ 0 & (i = s) \\ y_{i-1}^s & (i = s+1, \cdots, n) \end{cases}$$ ☆ （詳細略）

これより

$$(b_s^* \omega)|_{\partial_s O} = b_s^* \Big(\sum_{s'} g_{s'}^{\omega} \, du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_{s'}} \wedge \cdots \wedge du_n \Big)$$

$$= (b_s^* g_s^{\omega}) \, dy_1^s \wedge \cdots \wedge dy_{n-1}^s \quad (\because \text{Thm } 13.1.5,\ 13.1.8 \text{ と ☆})$$

従って $\displaystyle\int_{(\partial M, \partial\sigma)} b^*\omega = \sum_{\substack{s \\ \partial_s U \neq \emptyset}} \int_{(\partial M, \partial\sigma)} b_s^*\omega$

$$= \sum_s \int_{(\partial_s O,\ \partial\sigma_{\psi_s})} b_s^*\omega$$

$$= \sum_s \int_{(\partial_s O,\ (-1)^s \sigma_u)} b_s^*\omega$$

$$= \sum_s I_{(\partial_s U,\ (-1)^s \sigma_u)}\left(((\psi_s)^{-1})^*(b_s^* \eta_s^\omega)\right)$$

$$= \sum_s I_{(\partial_s U,\ (-1)^s \sigma_u)}\left((b_s \circ \psi_s^{-1})^* \eta_s^\omega\right)$$

$$= \sum_s I_{(\partial_s U,\ (-1)^s \sigma_u)}\left((u^{-1} \circ \phi_s)^* \eta_s^\omega\right)$$

$$= \sum_s I_{(\partial_s U,\ (-1)^s \sigma_u)}\left(\phi_s^* \eta_{s.U}^\omega\right)$$

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, "u", "\sim"'] & U \\ \partial_s O \arrow[u, "b_s"] \arrow[r, "\sim", "\psi_s"'] \arrow[ur, phantom, "@"] & \partial_s U \arrow[u, "\phi_s"'] \end{tikzcd}$$

①, ② より

$$\int_{(M,\sigma)} d\omega = \int_{(\partial M, \partial\sigma)} b^*\omega \qquad \square$$

Proof of Thm 13.2.2 : 略

Hint : 積分の定義 (Thm 11.4.1) に注意しながら

Cor 11.4.3 と Lemma 13.4.2 を使う.