Section 14 : 体積形式とラドン測度

(この Section は後の Section と独立しています)

Section 11 で

"support compact n-form の積分 $\int_{(M,\sigma)} \omega$"

を定義した.

Q1 : 関数の積分は?

Q2 : ルベーグ積分論との関係は?

Q3 : 向き付けられない場合は?

Section 14.1 : 関数の積分

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners

σ : M の向き

$\omega \in \Omega^n(M)$: n-form on M

記号 : $C_c^\infty(M) := \{ f \in C^\infty(M) \mid \mathrm{supp}\, f$: コンパクト $\}$

Prop 14.1.1 : ${}^{\forall} f \in C_c^{\infty}(M)$, $f\omega \in \Omega_c^n(M)$

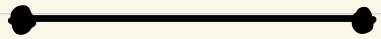
Def 14.1.2 (関数の積分):

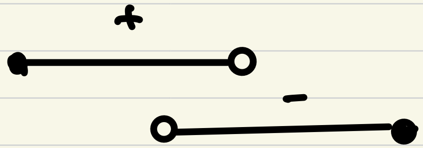
$$I^{\omega}_{(M,\sigma)} : C_c^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_{(M,\sigma)} \underbrace{f\omega}_{\in \Omega_c^n(M)}$$

Prop 14.1.3 :

$I^{\omega}_{(M,\sigma)} : C_c^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ は線型

Example 14.1.4

$M =$  $= [0,1]$

$\sigma =$ 

$\omega = dx$ (← $\mathbb{R}$ 上の 1-form dx を $M = [0,1]$ に制限したもの)

$\rightsquigarrow \quad \forall f \in C^\infty(M) = C_c^\infty(M),$

$$I^{\omega}_{(M,\sigma)}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Section 14.2 : 体積形式とそれに対応する向き

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners

Def 14.2.1 :

$\omega \in \Omega^n(M)$ が体積形式 (volume form)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\omega_p \neq 0$ $(\forall p \in M)$

Def 14.2.2 : $\omega \in \Omega^n(M)$ を M の volume form とする.

$$\sigma_\omega : \mathcal{A}^{conn} \to \{\pm 1\}$$

$$(O, U, u) \mapsto \begin{cases} 1 & \left(\text{if } \underbrace{\omega_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p\right)}_{\text{for any } p \in O} > 0\right) \\ -1 & \left(\text{if } \underbrace{\omega_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p\right)}_{\text{for any } p \in O} < 0\right) \end{cases}$$

$$g^{\omega}_{\{1,\cdots,n\},u} = \omega_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p\right)$$

Prop 14.2.3 : $\sigma_\omega : \mathcal{A}^{conn} \to \{\pm 1\}$ is well-defined で

M の向きを定める.

Theorem 14.2.4（Thm 9.2.1 と関係あり）

M についての以下の2条件は同値

(i) M 上の volume form が存在する.

(ii) M の向きが存在する.

Hint: (i) $\Rightarrow$ (ii) : Prop 14.2.3

(ii) $\Rightarrow$ (i) : 1の分割を使う

Example 14.2.5 :

$$M = \mathbb{R}^n$$

$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \text{とする.}$$

このとき ω は $M = \mathbb{R}^n$ 上の volume form で

$$\sigma^\omega : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathrm{id}) \mapsto 1$$

Example 14.2.6 :

再掲 : Ex 6.2.13　$S^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=1 \right\}$ とする.

各 $p \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ について

T_pS^2 を "$\mathbb{R}^3$ における p の直交補空間" と同一視する.

ここで T_pS^2 上の 2次交代形式 $(\omega_{Haar})_p$ を

縦ベクトル3本を並べる.

$$(\omega_{Haar})_p(v, w) = \det(p \; v \; w) \qquad (v, w : p \text{ と直交する } \mathbb{R}^3 \text{ のベクトル})$$

$$\underset{T_pS^2}{\rotatebox{90}{$\subset$}}$$

このとき $\omega_{Haar} : S^2 \to \bigwedge^2 T^\vee S^2$ は $\Gamma(\bigwedge^2 T^\vee M)$ の元
$\quad p \mapsto (p, (\omega_{Haar})_p)$ 　(つまり 2-form)

ω_{Haar} は volume form

$\sigma^{\omega_{Haar}}$ について

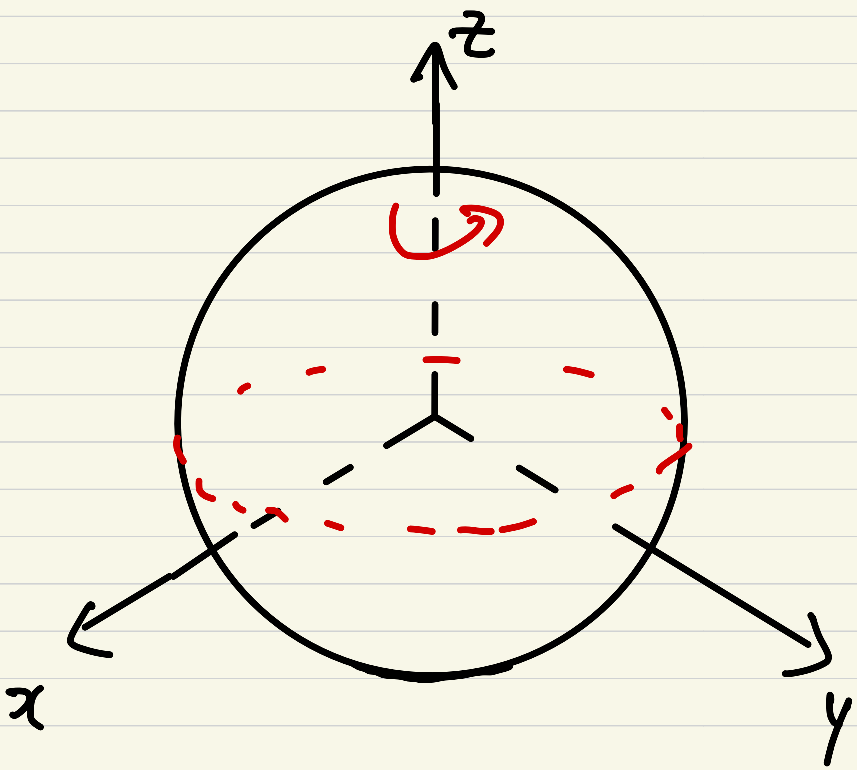
例えば $O = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S^2 \;\middle|\; z > 0 \right\}$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; u_1^2 + u_2^2 < 1 \right\}$

$\mathfrak{u} : O \to U, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

とする

このとき $\left(\sigma^{\omega_{Haar}}\right)_{\mathfrak{u}} = 1$



Hint $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として

$(\omega_{Haar})_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \mathfrak{u}_2}\right)_p \right)$

を計算

Section 14.3 : ラドン測度

設定 : $X := (X, \mathcal{O}_X)$: 局所コンパクト Hausdorff 位相空間

記号 : $\mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$: $\mathcal{O}_X$ の生成する X 上の完全加法族 (Borel 集合族)

Def 14.3.1: 可測空間 $(X, \mathcal{F}(\mathcal{O}_X))$ 上の

測度 $\nu : \mathcal{F}(\mathcal{O}_X) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$

がラドン測度

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) ${}^\forall A \subset X$: compact, $\nu(A) \neq \infty$.

かつ

(ii) ${}^\forall E \in \mathcal{F}(\mathcal{O}_X)$, $\nu(E) = \inf\left\{ \nu(U) \;\middle|\; \begin{array}{l} U \text{ は open in } X \\ E \subset U \end{array} \right\}$

かつ

(iii) ${}^\forall U \subset X$. open, $\nu(U) = \sup\left\{ \nu(A) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ は compact} \\ A \subset U \end{array} \right\}$

Example 14.3.2: $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度はラドン測度

Theorem 14.3.3 : ν を X 上のラドン測度とする.

このとき $\forall f \in C_c(X)$, f は ν について L^1 可積分

Def 14.3.4 : X 上のラドン測度 ν について

$I_\nu : C_c(X) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f$ の ν によるルベーグ積分

とおく.

Section 14.4：体積形式に対応するラドン測度

設定：M : n-mfd with corners

$\omega \in \Omega^n(M)$: volume form on M

記号：σ^ω : ω の定める M の向き

$I^\omega_{(M,\sigma^\omega)} : C^\infty_c(M) \to \mathbb{R}$

$f \mapsto \int_{(M,\sigma^\omega)} f\omega$

Theorem 14.4.1 :

$\exists! \nu$: M 上のラドン測度 s.t.

$$I_\nu \big|_{C_c^\infty(M)} = I^\omega_{(M,\sigma^\omega)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{i.e. } \forall f \in C_c^\infty(M), \\ \quad f \text{ の } \nu \text{ によるルベーグ積分} = \int_{(M,\sigma^\omega)} f\omega \end{array} \right)$$

証明略 ($I^\omega_{(M,\sigma^\omega)}$ の $C_c(M)$ への拡張
$C_c(M)$ における $I^\omega_{(M,\sigma^\omega)}$ の positivity, "連続性",
Riesz - Markov - Kakutani representation theorem)

Example 14.4.2 $M = \mathbb{R}^n$

$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$

ν : ルベーグ測度 on M

$\rightsquigarrow \forall f \in C_c^\infty(M), \quad I^\omega_{(M,\sigma)}(f) = I_\nu(f)$

Example 14.4.3 $M = S^2$

$\omega = \omega_{\mathrm{Haar}}$ とする.

このとき ω に対応するラドン測度 ν は $O(3)$-不変

Section 14.5 : ベクトル空間上の密度

設定 : V : n-dim'l vector space / $\mathbb{R}$

Def 14.5.1 (density)

写像 $\mu : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n = \dim V} \to \mathbb{R}$ が V の密度 (density)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall (v_1, \cdots, v_n) \in V \times \cdots \times V,\ ^\forall A \in \mathrm{End}(V)$

$$\mu(Av_1, \cdots, Av_n) = |\det A| \cdot \mu(v_1, \cdots, v_n)$$

Remark: $\omega \in \bigwedge^n V^\vee$ (n次交代形式) について,

$$\omega(Av_1, \cdots, Av_n) = (\det A) \cdot \omega(v_1, \cdots, v_n)$$

$(v_1, \cdots, v_n \in V,\ A \in \mathrm{End}(V))$

Example 14.5.2 : $V = \mathbb{R}$ のとき,

$\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ は density

Example 14.5.3 : $V = \mathbb{R}^2$ のとき

$\mu : (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right|$

は density

Prop 14.5.4 : μ : V 上 a density とする.

$(v_1, \cdots, v_n) \in V \times \cdots \times V$ が一次従属のとき,

$$\mu(v_1, \cdots, v_n) = 0$$

Def 14.5.5 : V 上 a density μ が positive

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists \{e_1, \cdots, e_n\}$: V の基底 s.t.

$$\mu(e_1, \cdots, e_n) > 0$$

$\left(\iff \forall \{e_1, \cdots, e_n\} : V \text{ の基底}, \ \mu(e_1, \cdots, e_n) > 0 \right)$

Prop 14.5.6: 各 $\omega \in \bigwedge^n V^\vee$ について

$|\omega| : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \to \mathbb{R}, \ (v_1, \cdots, v_n) \mapsto |\omega(v_1, \cdots, v_n)|$

は V 上の density

また: $\omega \neq 0 \iff |\omega|$ は positive

Def 14.5.7 : $\mathrm{Den}(V) := \{ V$ 上の density $\}$

Thm 14.5.8 $\mathrm{Den}(V)$ は $\mathrm{Map}(\underbrace{V\times\cdots\times V}_{n}, \mathbb{R})$ の 1次元線型部分空間

Hint : Prop 14.5.4,

$GL(V) \curvearrowright \{ V$ の基底$\}$: 推移的

Remark : $\bigwedge^{n} V^{\vee} \to \mathrm{Den}(V)$, $\omega \mapsto |\omega|$

は線型ではない事に注意

Section 14.6 : 密度形式

設定 : $\mathcal{M} = (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners

(向き付け不可能でもよい)

Def 14.6.1: $\mathrm{Den}(TM) := \bigsqcup_{p \in M} \mathrm{Den}(T_pM)$

とおく.

Remark: $\mathrm{Den}(TM)$ は M 上のベクトル束

Def 14.6.2:

$$\mu : M \to \mathrm{Den}(TM),\ p \mapsto (p, \underbrace{\mu_p}_{\in \mathrm{Vol}(T_pM)})$$

の形で書ける写像を

$\mathrm{Den}(TM)$ の section という.

Def 14.6.3:

$$\mathrm{Sect}(\mathrm{Den}(TM)) = \{ \mu : M \to \mathrm{Den}(M) \mid \text{section} \}$$

Prop 14.6.4:

$\mathrm{Sect}(\mathrm{Den}(M))$ は $C^\infty(M)$ 加群

Def 14.6.5

$\mu \in \mathrm{Sect}(\mathrm{Den}(M))$ is positive

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall p \in M$, $\mu_p \in \mathrm{Den}(T_pM)$ is positive

Prop 14.6.6

各 $\mu \in \mathrm{Sect}(\mathrm{Den}(M))$, 各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ について

$\exists! \, g^{\mu}_{u} : O \to \mathbb{R}$ s.t.

$$\mu_p = g^{\mu}_{u}(p) \cdot |(du_1)_p \wedge \cdots \wedge (du_n)_p|$$

Def 14.6.7 : $\mu \in P(\mathrm{Den}(M))$ について,

$$\mu \text{ が } C^{\infty}\text{級} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} g^{\mu}_{u} \in C^{\infty}(O) \quad \forall (O, U, u) \in \mathcal{A}.$$

これのとき μ を density form on M と呼ぶ.

Def 14.6.8

$\Gamma(\mathrm{Den}(TM)) := \{ \mu \in \mathrm{Sect}(\mathrm{Den}(TM)) \mid \mu$ は C^∞ 級 $\}$

$\Gamma^+(\mathrm{Den}(TM)) := \{ \mu \in \Gamma(\mathrm{Den}(TM)) \mid \mu$ は positive $\}$

Prop 14.6.9

$\Gamma(\mathrm{Den}(TM))$ は $\mathrm{Sect}(\mathrm{Den}(TM))$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群

$\Gamma^+(\mathrm{Den}(TM))$ は $\Gamma(\mathrm{Den}(TM))$ の convex cone

Prop 14.6.10: $\forall \omega \in \Omega^n(M)$: volume form on M,

$|\omega| \in \Gamma^+(\mathrm{Den}(TM))$

Hint: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ は C^∞級

Remark: 一般には $\omega \in \Omega^n(M)$ について

$|\omega| \in \Gamma(\mathrm{Den}(TM))$ とは限らないこと

に注意

Theorem 14.6.11: g を M 上のリーマン計量とする.

各 $p \in M$ について

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ を固定し,

$$\mu_p^g := \underbrace{\sqrt{\det g\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p\right)}}_{\text{正の値}} \left|(du_1)_p \wedge \cdots \wedge (du_n)_p\right|$$

とおく.

このとき $\mu_p^g \in \mathrm{Den}(T_pM)$ は well-defined で

$\mu^g : M \to \mathrm{Den}(TM),\ p \mapsto (p, \mu_p)$ とおけば

$\mu^g \in \Gamma^+(\mathrm{Den}(TM))$.

Cor 14.6.12: $P^{+}(\mathrm{Den}(TM)) \neq \emptyset$

Hint: リーマン計量の存在 (Thm 10.2.2)

Thm 14.6.11

Section 14.7 : 密度形式の積分

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners

(向き付け不可能でもよい)

Def 14.7.1 : 各 $\mu \in \Gamma(\mathrm{Den}(TM))$ について

$$\operatorname{supp}\mu := \overline{\{p \in M \mid \mu_p \neq 0\}}$$

← Mにおける閉包

Def 14.7.2:

$$\Gamma_c(\mathrm{Den}(TM)) := \{\mu \in \Gamma^0(\mathrm{Den}(TM)) \mid \operatorname{supp}\mu \text{ は コンパクト}\}$$

Prop 14.7.3: $\Gamma_c(\mathrm{Den}(TM))$ は $\Gamma(\mathrm{Den}(TM))$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群

Def 14.7.4: $O \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

$$\mathcal{P}_c(\mathrm{Den}(TM); O) := \{\mu \in \mathcal{P}_c(\mathrm{Den}(TM)) \mid \operatorname{supp}\mu \subset O\}$$

Prop 14.7.5: $\mathcal{P}_c(\mathrm{Den}(TM); O)$ は $\mathcal{P}_c(\mathrm{Den}(TM))$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群

Theorem 14.7.6 (密度形式の積分)

線型写像 $\int_M : \Gamma_c(\mathrm{Den}(TM)) \to \mathbb{R}$ であって

$$\mu \mapsto \int_M \mu$$

$\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}$, $\forall \mu \in \Gamma_c^0(\mathrm{Den}(TM); O)$

$$\int_M \mu = (u^{-1})^* \mu_u \in C_c(U) \text{ のリーマン積分}$$

となるものが一意的に存在する.

Key to Thm 14.7.6

Lemma 14.7.7

$(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}$

$\mu \in \Gamma_c(\mathrm{Den}(TM); O \cap O')$

$(u^{-1})^* \mathfrak{J}^{\mu}_{u}$ の U におけるリーマン積分

$= (v^{-1})^* \mathfrak{J}^{\mu}_{v}$ の V におけるリーマン積分

Section 14.8 : 密度形式とラドン測度

設定. $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd with corners

$\mu \in P^+(\mathrm{Den}(TM))$: positive density form on M

Thm 14.8.1 $\exists ! \, \nu$: ラドン測度 on M

s.t. $\forall f \in C_c^\infty(M)$,

$$\int_M f\mu = I_\nu(f)$$