Section 15：ホモロジー代数

ホモロジー代数の一般論を
必要最小限だけ紹介する.

内容

- 複体とそのホモロジー
- 複体の準同型と誘導準同型
- 複体のホモトピー
- 鎖複体と余鎖複体

Section 15.1 : 複体とそのホモロジー

設定 : R : 可換環

A : R 加群

$\partial : A \to A$: R 加群準同型

Def 15.1.1 (A, ∂) が R 複体

$\overset{\text{def}}{\iff} \partial^2 = 0$

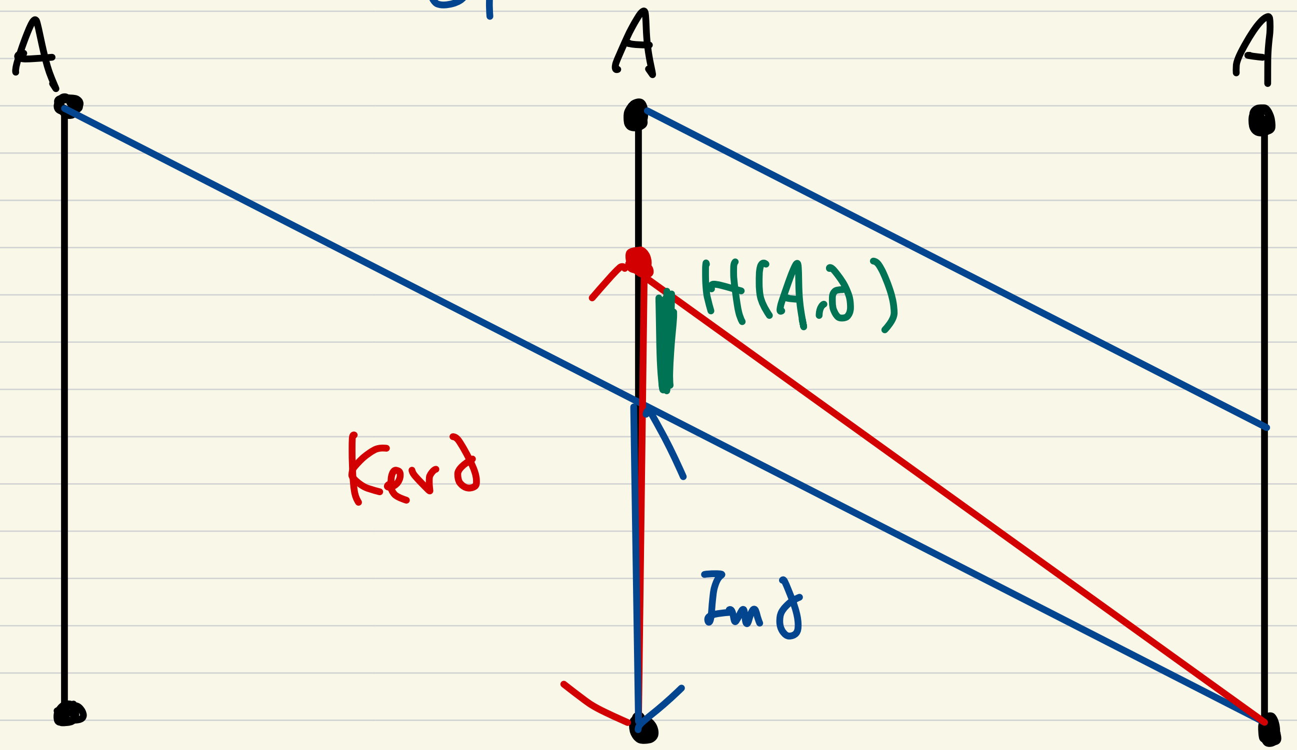
Prop 15.1.2 (A, ∂) が R 複体のとき

$\operatorname{Im} \partial$ は $\operatorname{Ker} \partial$ の部分 R 加群

Def 15.1.3 : R 複体 (A, ∂) について

$$H(A,\partial) := \mathrm{Ker}\,\partial / \mathrm{Im}\,\partial \quad (R\text{加群})$$

(A,∂) の homology



Section 15.2：複体の準同型と誘導準同型

設定：R：可換環

$(A, \partial^A), (B, \partial^B)$：$R$ 複体

$F : A \to B$：R加群準同型

Def 15.2.1：$F : A \to B$ が R複体準同型

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} F \circ \partial^A = \partial^B \circ F$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ {\scriptstyle \partial^A}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \partial^B} \\ A & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

Theorem 15.2.2　$F: A \to B$ を R 複体準同型とする.

このとき

$$H(F): H(A, \partial^A) \to H(B, \partial^B)$$

誘導準同型

$$[a] \mapsto [F(a)]$$

$$(a \in \mathrm{Ker}\, \partial^A)$$

は well-defined で R 加群準同型

$a, b \in \mathrm{Ker}\, \partial^A$ について

示

① $F(a) \in \mathrm{Ker}\, \partial^B$

② $[a] = [b]$ のとき $[F(a)] = [F(b)]$

Prop 15.2.3: R複体準同型同士の合成はまたR複体準同型.
更に恒等写像はR複体準同型.
特に"R複体とR複体準同型"は圏をなす.

Theorem 15.2.4:
$H:\begin{cases}(A,\partial)\mapsto H(A,\partial)\\ F\mapsto H(F)\end{cases}$ はR複体とR複体準同型の圏から
R加群とR加群準同型の圏への関手

i.e. $H(id_A)=id_{H(A,\partial)}$ $\left({}^\forall(A,\partial):\text{R複体}\right)$

$H(F\circ G)=H(F)\circ H(G)$ $\left({}^\forall F,G:\text{合成可能なR複体準同型}\right)$

Section 15.3 : 複体のホモトピー

設定 :　R : 可換環

$(A, \partial^A), (B, \partial^B)$: R複体

$F, G : A \to B$: R複体準同型

ゴール :

$H(F) = H(G) : H(A, \partial^A) \to H(B, \partial^B)$

となるための十分条件を与える.

Def 15.3.1 : $F, G : A \to B$ が homotope

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists D : A \to B$: R加群準同型

s.t. $\partial^B \circ D + D \circ \partial^A = F - G$

FからGへのhomotopy

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\partial^A"] \arrow[dr, "F-G"] & B \arrow[d, "\partial^B"] \\ A \arrow[r, "D"'] & B \end{tikzcd}$$

Prop 15.3.2 : "homotope" は同値関係

on $\{R$複体準同型 $: A \to B\}$

Theorem 15.3.3　F と G が homotope ならば

$$H(F) = H(G) : H(A, \partial^A) \to H(B, \partial^B)$$

Proof of Thm 15.3.3 :

$\forall z \in \operatorname{Ker} \partial^A$ をとる.

(示) $[F(z)] = [G(z)]$ in $H(B, \partial^B)$

i.e. $F(z) - G(z) \in \operatorname{Im} \partial^B$

(以下略)

Section 15.4：鎖複体と余鎖複体

設定　R：可換環

(C, ∂)：R複体

(Δ, d)：R複体

R加群としての代数的

Def 15.4.1 : 直和分解 $C = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k$ が

$\partial C_k \subset C_{k-1}$ をみたすとき

$(C = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k, \partial)$ を R鎖複体 という.

chain complex

R加群としての代数的

Def 15.4.2 : 直和分解 $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k$ が

$d A^k \subset A^{k+1}$ をみたすとき

$(A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k, d)$ を R余鎖複体 という.

co chain complex

設定 $(C = \bigoplus_k C_k, \partial)$: R 鎖複体

$(\Lambda = \bigoplus_k \Lambda^k, d)$: R 余鎖複体

Def 15.4.3 : $H_k(C,\partial) := (\operatorname{Ker}\partial \cap C_k) / \partial C_{k+1}$ $(\subset C_k)$

k 次 homology

$H^k(\Lambda, d) := (\operatorname{Ker} d \cap \Lambda^k) / d\Lambda^{k-1}$

k 次 cohomology

Theorem 15.4.4 : $\bigoplus_k H_k(C,\partial) \cong H(C,\partial)$, $\sum_k [a_k] \mapsto [\sum_k a_k]$

$\bigoplus_k H^k(\Lambda, d) \cong H(\Lambda, d)$, $\sum_k [b_k] \mapsto [\sum_k b_k]$

(R加群として同型)

設定：$(C^i = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C^i_k,\ \partial^i)$: R 鎖複体 $(i=1,2)$

$(\Delta_i = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Delta^k_i,\ d_i)$: R 余鎖複体 $(i=1,2)$

$F : C^1 \to C^2$;
$G : \Delta_1 \to \Delta_2$; R 複体準同型

Def 15.4.5 : $F : C^1 \to C^2$ が R 鎖複体準同型

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} F(C^1_k) \subset C^2_k \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$

$G : \Delta_1 \to \Delta_2$ が R 余鎖複体準同型

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} G(\Delta^k_1) \subset \Delta^k_2 \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$

Prop 15.4.6 : R鎖複体準同型の誘導準同型

[resp. R余鎖複体準同型]

は homology の次数を保つ

[resp. cohomology]

(i.e. $H(F)\ (H_k(C^1, \partial)) \subset H_k(C^2, \partial)$

$H(G)\ (H^k(\Delta_1, d)) \subset H^k(\Delta_2, d)$)