Section 16 : 特異ホモロジー

設定 : M : n-mfd with corners $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

R : 可換環

知りたい事 :

$$\left\{ (\Omega, \sigma, \iota) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Omega : \text{compact mfd with } \partial\Omega = \emptyset \\ \sigma : \Omega \text{ の向き} \\ \iota : \Omega \to M \end{array} \right\} \Big/ \text{“}M\text{における変形”}$$

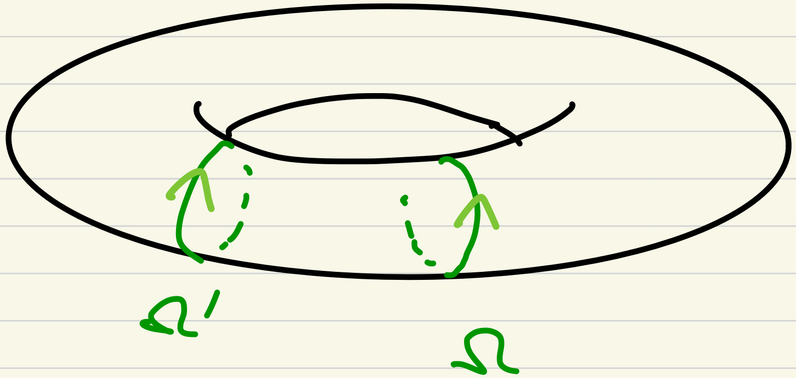
“Mの形状” の情報がつまっている!

… しかしどうやって定義する?

ゴール : “特異ホモロジー” として R 加群の言葉で定義する!

Ex:

$M =$ トーラス $= S^1 \times S^1$



$\Omega \simeq \Omega' \not\simeq \{1点\}$

Ex:

$M =$ 球面 $= S^2$

$\Omega \simeq \{1点\}$

$\left\{ M内の1次元部分多様体\ \Omega\ で\ \partial\Omega = \emptyset \right\} /\simeq \ = \{\{1点\}\}$

内容：
- 標準単体
- 特異ホモロジー
- 誘導準同型
- ホモトピー不変性
- C^∞-特異ホモロジーと特異ホモロジーの同型定理

Section 16.1 : 標準単体

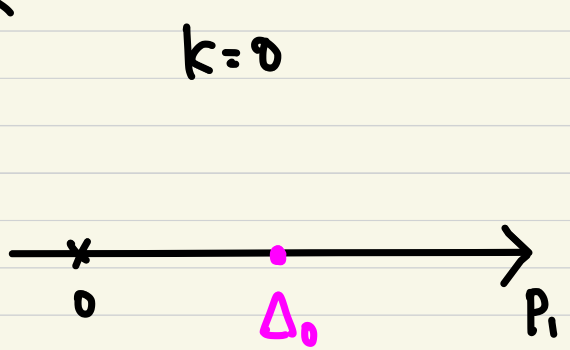
設定 : $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

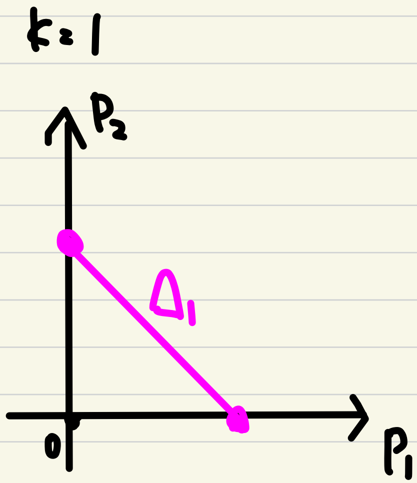
Def 16.1.1

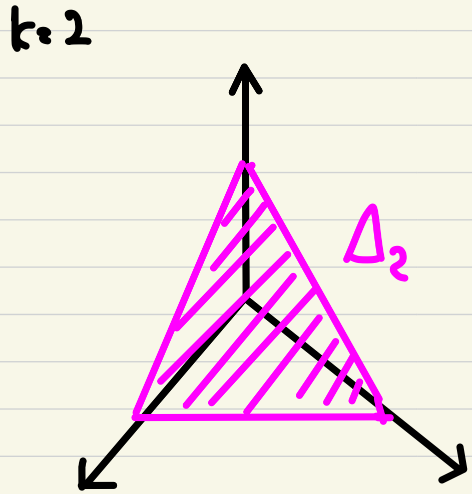
$$\Delta_k := \left\{ p = (p_1, \cdots, p_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \;\middle|\; p_l \geq 0\ (\forall l),\ \sum_l p_l = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

標準 k-単体 (standard k-simplex)

Ex







Prop 16.1.2: 以下の意味で Δ_k は k-dim'l C^∞-mfd with corners

Δ_k の C_k-局所座標 (cf. Section 8) として

(O^l, U^l, u^l) $(l = 1, \cdots, k+1)$ を

$$\begin{cases} O^l := \{ p \in \Delta_k \mid p_l \neq 0 \} \underset{\text{open}}{\subset} \Delta_k \\ U^l := \{ u \in C_k \mid \sum_i u_i < 1 \} \underset{\text{open}}{\subset} C_k \\ u^l : O^l \to U^l,\ p \longmapsto (p_1, \cdots, \underset{\overset{\wedge}{p_l}}{}, \cdots, p_{k+1}) \end{cases}$$ と定める.

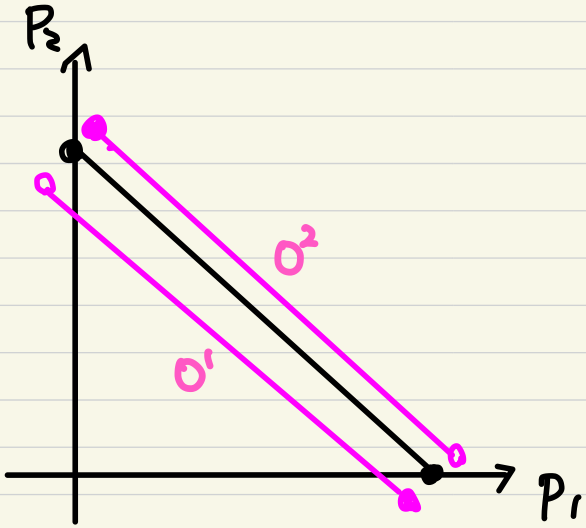
このとき

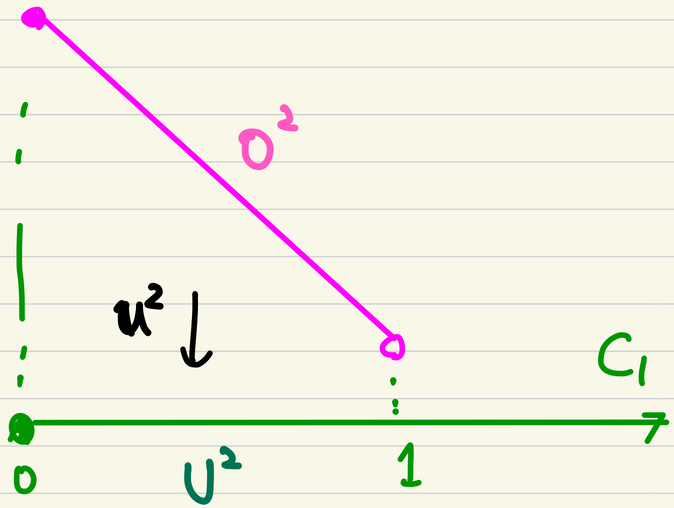
$\mathcal{A}_{\Delta_k} := \{ (O^l, U^l, u^l) \mid l = 1, \cdots, k+1 \}$ は

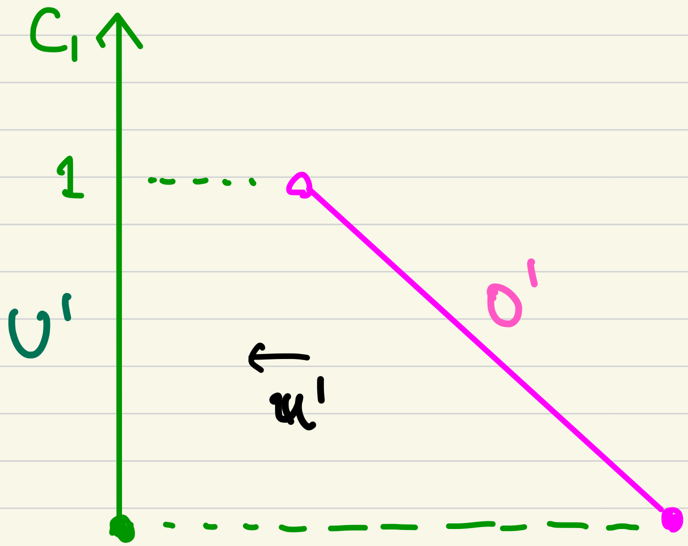
Δ_k の C_k-atlas であり,

$(\Delta_k, [\mathcal{A}_{\Delta_k}])$ は k-mfd w.c.

Ex :







③ Δ_k の向き

Δ_k の向きは以下の2種類ある.

Def 16.1.3

$\sigma^k_+, \sigma^k_- : \{(O^l, U^l, u^l)\}_{l=1,\cdots,k+1} \to \{1,-1\}$ をそれぞれ

$$(\sigma^k_+)_{u^l} := (-1)^{l+1}$$
$$(\sigma^k_-)_{u^l} := (-1)^{l}$$

$(l=1,\cdots,k+1)$ として定める.

このとき σ_+, σ_- は Thm 9.1.5 の意味で Δ_k 上の向きを定める.

◎ Δ_k の境界

$k \geq 1$ とする.

各 $l = 1, \cdots, k+1$ について

$$\iota_l : \Delta_{k-1} \to \Delta_k , \quad q = (q_1, \cdots, q_k) \mapsto (q_1, \cdots q_{l-1}, 0, q_l, \cdots q_k)$$

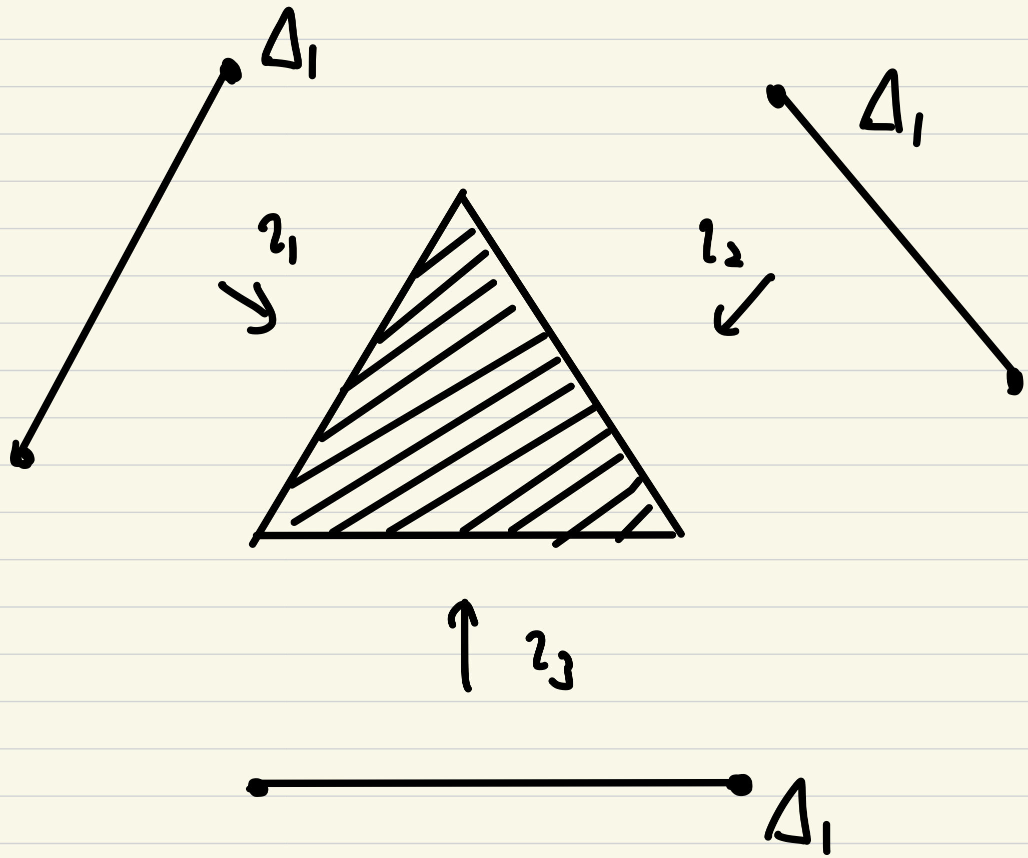
とおく.

Prop 16.1.4

$$(\underbrace{\Delta_{k-1} \sqcup \Delta_{k-1} \sqcup \cdots \sqcup \Delta_{k-1}}_{k+1\ \text{コ}}, \ \iota_1 \sqcup \iota_2 \sqcup \cdots \sqcup \iota_{k+1})$$

Δ_k の boundary manifold (Def 12.2.1) の意味

Ex

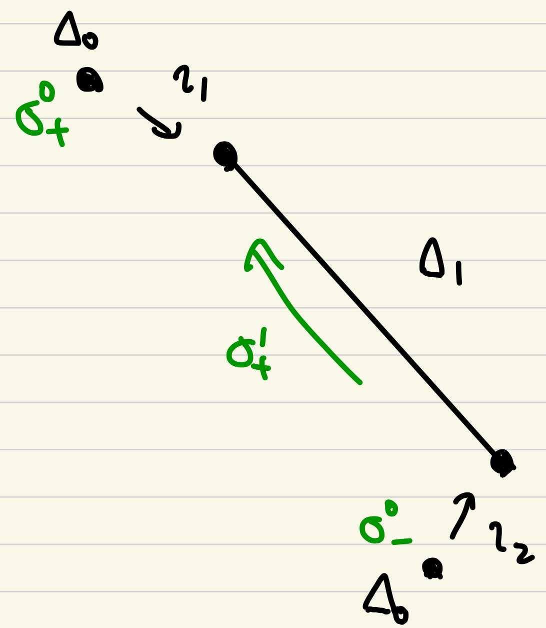


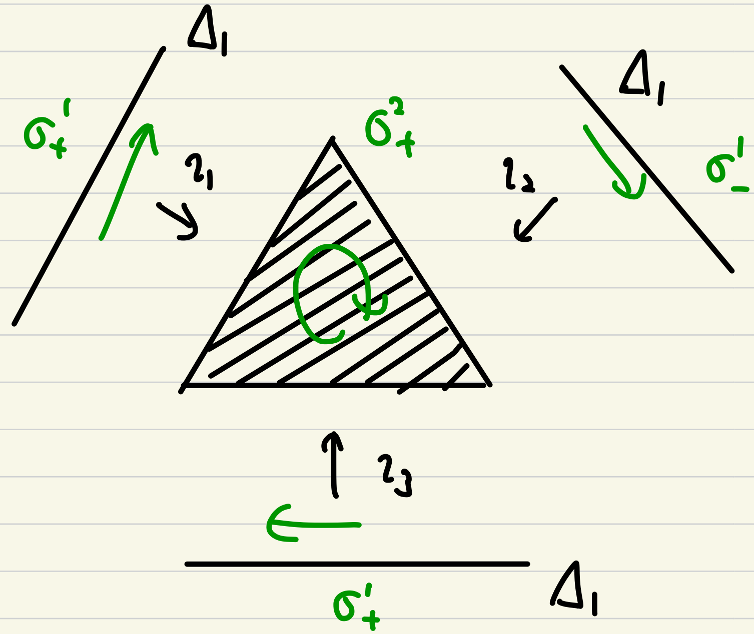
Prop 16.1.5: Δ_k 上の向き σ_+^k [resp. σ_-^k] の誘導する

boundary mfd $(\Delta_{k-1} \sqcup \cdots \sqcup \Delta_{k-1},\ \iota_1 \sqcup \cdots \sqcup \iota_{k+1})$ 上の向き (Thm 12.3.1) は

$$\sigma_+^{k-1} \sqcup \sigma_-^{k-1} \sqcup \sigma_+^{k-1} \sqcup \cdots \sqcup \sigma_{(-1)^{k+2}}^{k-1} \text{ となる.}$$

$$\left[\text{resp. } \sigma_-^{k-1} \sqcup \sigma_+^{k-1} \sqcup \sigma_-^{k-1} \sqcup \cdots \sqcup \sigma_{(-1)^{k+1}}^{k-1}\right]$$





Section 16.2：特異ホモロジー

設定：X：位相空間

R：可換環

Def 16.2.1：各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

$C(\Delta_k, X) := \{ \tau : \Delta_k \to X \mid \text{conti} \}$

Def 16.2.2：各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

R加群 $C_k(X;R)$ を以下で定める.

$C_k(X;R) :=$

chain

$$\left(C(\Delta_k, X) \times \{\sigma_+^k, \sigma_-^k\} \text{ の生成する自由 } R\text{加群} \right) \Big/ \left\langle (\tau, \sigma_+^k) + (\tau, \sigma_-^k) \;\middle|\; \tau \in C(\Delta_k, X) \right\rangle$$

continuous

部分R加群を生成

Prop 16.2.3:

$C_k(X;R)$ の元 c は

$$\sum_i a_i(\tau_i, \sigma_+^k) \quad (a_i \in R,\ \tau_i \in C(\Delta_k, X))$$

(有限和)

の形で書ける.

(各 $\tau \in C(\Delta_k, X)$ について

$-(\tau, \sigma_+^k) = (\tau, \sigma_-^k)$ に注意)

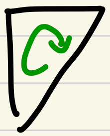
気持ち: 本当は

$$\left\{ (\Omega, \sigma, \iota) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Omega : \text{compact mfd w.c.} \\ \sigma : \Omega \text{の向き} \\ \iota : \Omega \to X : \text{conti} \end{array} \right\}$$

を考えたいが、扱いが難しい.

その代わりに $C_k(X;\mathbb{Z})$ や $C_k(X;\mathbb{R})$ などを考える.

Ex: $\Omega =$  $\xrightarrow[\iota]{} X$ を考える代わりに、

( $\to X$) + ( $\to X$) と考えて代用する.

"境界作用素" を以下で定義する.

Def 16.2.4 : $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする.

$$\partial_k : C_k(X;R) \longrightarrow C_{k-1}(X;R)$$ を

各 $c = \sum_i a_i (\tau_i, \sigma_+^k)$ $\left(a_i \in R,\ \tau_i \in C(\Delta_k, X) \right)$ について

σ_+^k が $(\Delta_{k-1}, \iota_\ell)$ に誘導する向き

$$\partial_k c := \sum_i a_i \sum_{\ell=1}^{k+1} \left(\tau_i \circ \iota_\ell,\ \sigma^{k-1}_{(-1)^{\ell+1}} \right) \in C_{k-1}(M;R)$$

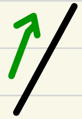
$$\left(\partial_k (\tau, \sigma_\pm^k) := \sum_\ell \left(\tau_i \circ \iota_\ell,\ \sigma^{k-1}_{\pm(-1)^{\ell+1}} \right) \right)$$

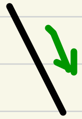
と定める.

Prop 16.2.5 : $\partial_k : C_k(X;R) \longrightarrow C_{k-1}(X;R)$ は well-defined $(k \geq 1)$

で R 加群準同型

Ex :

$\partial_k \Big($  $\xrightarrow[\tau]{} X \Big) := \Big($  $\to X \Big)$

$+ \Big($  $\to X \Big)$

$+ \Big($  $\to X \Big)$

Def 16.2.6: 各 $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ について

$C_k(X;R) := 0$ とおく

また各 $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ について

$\partial_k : C_k(X;R) \to C_{k-1}(X;R)$ を

ゼロ写像と定め

Def 16.2.7:
$$C_*(X;R) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k(X;R)$$
$$\partial := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \partial_k$$

Theorem 16.2.8. $\partial^2 = 0$ (境界に境界なし)

特に $\left(C_*(X,R) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k(X;R), \partial\right)$ は R 鎖複体

X上の R係数特異鎖複体

Def 16.2.9:
$$H_*(X;R) := H(C_*(X,R),\partial)$$
$$H_k(X;R) = H_k(C_*(X,R),\partial) = \operatorname{Ker}\partial_k / \operatorname{Im}\partial_{k+1}$$

R係数k次特異ホモロジー (Singular homology)

このとき $H_*(X;R) \cong \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H_k(X;R)$

Proof of Thm 16.2.8 : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall c \in C_k(X;R)$ をとる.

㊕ $\partial^2 c = 0$

$k \leq 1$ のときは明らか ($\because C_{k-2}(X;R) = 0$)

$k \geq 2$ とする.

$c = \sum_i a_i (\tau_i, \sigma_t^k)$ ($a_i \in R$, $\tau_i \in C(\Delta_k, X)$)

と書けるので

以下を示せばよい

㊕ $\partial^2 (\tau, \sigma_t^k) = 0$ $(\forall \tau \in C(\Delta_k, X))$

$\forall \tau \in C(\Delta_k, X)$ とする.

(示) $\partial^2(\tau, \sigma^k_+) = 0$

以下の Lemma を用いる

Lemma 16.2.9: $1 \leq l \leq k+1$, $1 \leq l' \leq k$ について

$$\iota_l \circ \iota_{l'} = \begin{cases} \iota_{l'} \circ \iota_{l-1} & (\text{if } l' < l) \\ \iota_{l'+1} \circ \iota_l & (\text{if } l' \geq l) \end{cases}$$

as maps $\Delta_{k-2} \to \Delta_k$

Hint: 直接計算

まず $\partial(\tau, \sigma_+^k) = \sum_{l=1}^{k+1} (\tau \circ \eta_l, \sigma^{k-1}_{(-1)^{l+1}})$

$$= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{l+1} (\tau \circ \eta_l, \sigma_+^{k-1})$$

$$\left(\because (\tau \circ \eta_l, \sigma_+^{k-1}) = -(\tau \circ \eta_l, \sigma_-^{k-1}) \right)$$

証明]

$$\partial^2(\tau, \sigma_+^k) = \sum_{\ell=1}^{k+1} (-1)^{\ell+1} \partial(\tau \circ \eta_\ell, \sigma_+^{k-1})$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k+1} (-1)^{\ell+1} \sum_{\ell'=1}^{k} (-1)^{\ell'+1} (\tau \circ \eta_\ell \circ \eta_{\ell'}, \sigma_+^{k-2})$$

$$= \sum_{\ell=1}^{k+1} \sum_{\ell'=1}^{k} (-1)^{\ell+\ell'} (\tau \circ \eta_\ell \circ \eta_{\ell'}, \sigma_+^{k-2})$$

$$= \sum_{1 \le \ell' < \ell \le k+1} (-1)^{\ell+\ell'} (\tau \circ \eta_\ell \circ \eta_{\ell'}, \sigma_+^{k-2})$$

$$+ \sum_{1 \le \ell \le \ell' \le k} (-1)^{\ell+\ell'} (\tau \circ \eta_{\ell'+1} \circ \eta_\ell, \sigma_+^{k-2})$$

($\because$ Lemma 16.2.9)

$$\left\{ \begin{array}{l} s = \ell' \\ s' = \ell - 1 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$= \sum_{1 \le s \le s' \le k} (-1)^{s+s'+1} (\tau \circ \eta_{s'+1} \circ \eta_s, \sigma_+^{k-2})$$

$$+ \sum_{1 \le \ell \le \ell' \le k} (-1)^{\ell+\ell'} (\tau \circ \eta_{\ell'+1} \circ \eta_\ell, \sigma_+^{k-2})$$

$$= 0$$

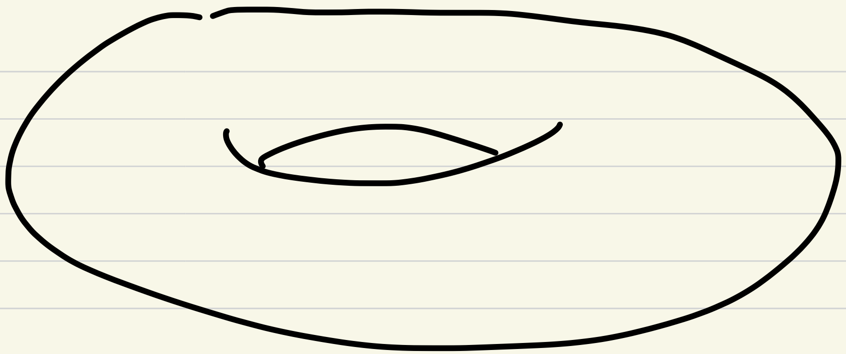
∎

気持ち: $R = \mathbb{Z}$ のとき

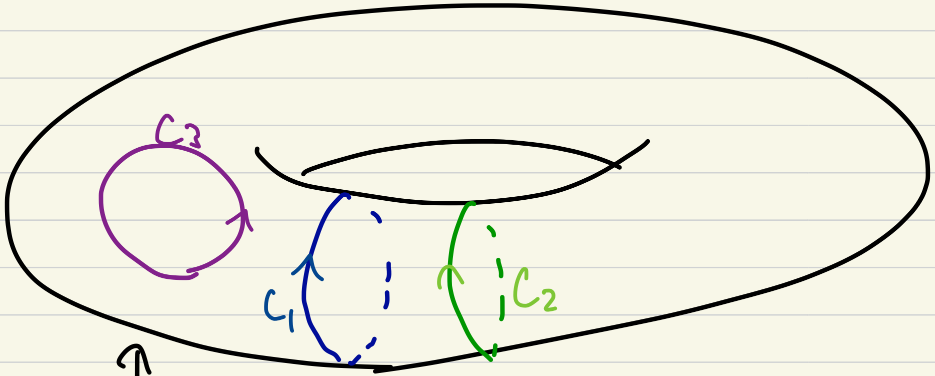
$$\mathrm{Ker}\,\partial_k \longleftrightarrow \left\{ (\Omega, \sigma, \imath) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Omega : \text{cpt mfd with } \partial\Omega = \emptyset \ \ (k\text{-dim'l}) \\ \sigma : \Omega \text{ の向き} \\ \imath : \Omega \to X : \text{conti} \end{array} \right\}$$

$\mathrm{Im}\,\partial_{k+1}$ で割る $\longleftrightarrow$ $(\Omega, \sigma, \imath)$ の X 内での変形を無視

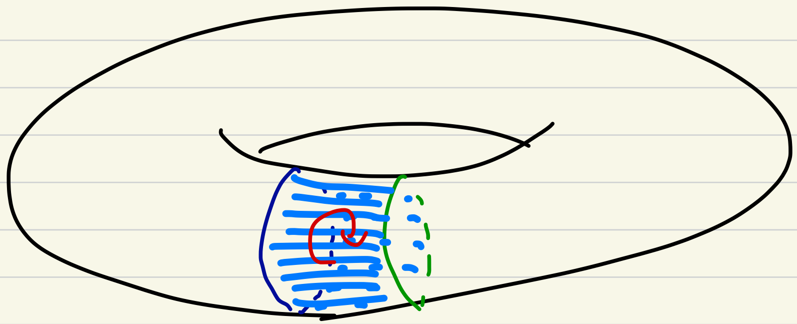
$$H_k(X ; \mathbb{Z}) \longleftrightarrow \left\{ (\Omega, \sigma, \imath) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Omega : \text{cpt mfd with } \partial\Omega = \emptyset \ \ (k\text{-dim'l}) \\ \sigma : \Omega \text{ の向き} \\ \imath : \Omega \to X : \text{conti} \end{array} \right\} \Big/ X \text{ 内での変形}$$

<u>Ex</u> X = 

$\Omega = S^1$



これらは別もの　　同じだとみなす



これの境界が

$C_1 - C_2$

Example 16.2.10 : X が 1点集合 のとき

$$C_k(X;R) \cong \begin{cases} R & (\text{if } k \geq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\partial_k \cong \begin{cases} 0 & (\text{if } k \leq 0 \text{ or } k : \text{odd}) \\ \mathrm{id}_R & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad H_k(X;R) \cong \begin{cases} R & (k = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Section 16.3：誘導準同型とホモトピー

設定：X, Y：位相空間
R：可換環

記号：$(C_*(X;R) := \bigoplus_k C_k(X;R), \partial^X)$：$X$ 上の R係数特異鎖複体
$(C_*(Y;R) := \bigoplus_k C_k(Y;R), \partial^Y)$：$Y$ 上の 〜

Prop 16.3.1：各連続写像 $f : X \to Y$ について
$f_*(\tau, \sigma^k_\tau) := (f \circ \tau, \sigma^k_\tau)$ として定まる
R-加群準同型 $f_* : C_*(X;R) \to C_*(Y;R)$ は
R 鎖複体準同型

Def 16.3.2: 各連続写像 $f: X \to Y$ について

R鎖複体準同型 $f_*: C_*(X;R) \to C_*(Y;R)$

の誘導するR加群準同型を

$$H(f) := H(f_*) : H(X;R) \to H(Y;R)$$

と書く。

Theorem 16.3.3: $H: \begin{cases} X \mapsto H(X;R) \\ f \mapsto H(f) \end{cases}$ は

位相空間の圏から

$\mathbb{Z}$-graded R加群の圏への関手

(詳細略)

Def 16.3.4: 連続写像 $f, g: X \to Y$ が homotope

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists P : X \times [0,1] \to Y$: conti

f から g への homotopy

s.t.

$$P(x, 0) = f(x)$$
$$P(x, 1) = g(x)$$
$(\forall x \in X)$

Prop 16.3.5: "homotope" は $C(X, Y) := \{ f : X \to Y \mid \text{conti} \}$ の同値関係を定める.

Theorem 15.2.5 : $f, g : X \to Y$: conti とする.

f と g が homotope ならば

$f_*, g_* : C_*(X;R) \to C_*(Y;R)$ も homotope.

特に $H(f) = H(g) : H(X;R) \to H(Y;R)$

証明略 : "プリズム準同型" と Thm 15.3.3

Def 16.3.6 : X と Y が homotope

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists f : X \to Y$: conti,

$\exists g : Y \to X$: conti,

s.t. $\begin{cases} g \circ f \underset{\text{homotope}}{\sim} \mathrm{id}_X \\ f \circ g \underset{\text{homotope}}{\sim} \mathrm{id}_Y \end{cases}$

Cor 16.3.7 : X と Y が homotope ならば

$H_k(X; R) \cong H_k(Y; R) \quad (\forall k)$

Example 16.3.8 : X が可縮 (1点集合と homotope) とする.

(例えばユークリッド空間の球, 開球など)

このとき
$$H_k(X;R) = \begin{cases} R & (\text{if } k=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Section 16.4: C^∞ 特異ホモロジー

設定: M : n-mfd with corners

R : 可換環

記号: Δ^k : k 次元標準単体

(k-mfd with corners)

$$C(\Delta^k, M) := \{ \tau : \Delta^k \to M \mid \text{conti} \}$$

$\left(C_*(M;R) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k(M;R), \partial \right)$:

M 上の R 係数特異鎖複体

Def 16.4.1:

$$C^\infty(\Delta_k, M) := \{ \tau \in C(\Delta_k, M) \mid \tau \text{ は } C^\infty \text{ 級} \} \subset C(\Delta_k, M)$$

$$C_k^\infty(M;R) := \left\{ \sum_i a_i(\tau_i, \sigma_+^k) \in C_k(M;R) \;\middle|\; \tau_i \in C^\infty(\Delta_k, M)\ (\forall i) \right\} \subset C(M;R)$$

記号の乱用

Prop 16.4.2: $C_k^\infty(M;R)$ は $C(M;R)$ の部分 R 加群で

$$\partial_k(C_k^\infty(M;R)) \subset C_{k-1}^\infty(M;R) \quad (\forall k)$$

特に $\left(C_*^\infty(M;R) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k^\infty(M;R),\ \partial\right)$ は R 鎖複体

M 上の R 係数 C^∞ 特異鎖複体

Def 16.4.3 R 鎖複体 $\left(C_*^\infty(M;R) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k^\infty(M;R), \partial\right)$

について

$$H_*^\infty(M;R) := H^\infty\left(C_*^\infty(M;R), \partial\right)$$

$$H_k^\infty(M;R) := H_k^\infty\left(C_*^\infty(M;R), \partial\right)$$

M の R 係数 C^∞ 特異ホモロジー

(smooth singular homology)

Theorem 16.4.4: $H_k^\infty(M;R) \cong H_k(M;R)$ ($\forall k$)

より正確には

包含写像 $j: C_*^\infty(M;R) \to C_*(M;R)$ について
(R鎖準同型)

$H(j): H^\infty(M;R) \to H(M;R)$

は R加群の間の同型写像となる.

(証明略: Thm 15.3.3 と
Whitney approximation theorem を用いる)