Section 17 : de Rham cohomology

再掲 de Rham 理論のモチベーションと流れ

モチベーション：多様体 M の形状（トポロジー）を知りたい

① M の特異ホモロジー $H_*(M;R)$ を計算したい （$R = \mathbb{R}$ とする）

（M の形状を反映した不変量）

② M の C^∞-特異ホモロジー $H^\infty_*(M;\mathbb{R})$ は $H_*(M;\mathbb{R})$ と同型なので

こちらが計算できればよい

③ M の de Rham コホモロジー $H^*_{dR}(M)$ は

$H^\infty_*(M;\mathbb{R})$ の双対空間とみなせる（de Rham の定理）

のでこれを計算できればよい

④ $H^*_{dR}(M)$ はいろんな手法で計算にアプローチできる．

Section 17.1 : de Rham cohomology の定義

設定 : M : n-mfd with corners

記号 : $\Lambda^k(M)$: k-forms on M 全体の実ベクトル空間 $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

$d_k : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$: 外微分 $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

Def 17.1.1 : 各 $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ について

$$A^k(M) := 0$$

$$d_k = 0 : A^k(M) \to A^{k+1}(M)$$

とおく.

Def 17.1.2 : $\Lambda^*(M) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Lambda^k(M)$ とおく.

$d := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} d_k$

Theorem 17.1.3 : $d^2 = 0$ (Thm 7.3.1 の再掲)

特に $(\Lambda^*(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Lambda^k(M), d)$ は余鎖複体

Def 17.1.4 : $H^*_{dR}(M) := H(\Lambda^*(M), d)$

$H^k_{dR}(M) := H^k(\Lambda^*(M), d) = \operatorname{Ker} d_k / \operatorname{Im} d_{k-1}$

k 次 de Rham cohomology

Observation 17.1.5 : $H^k_{dR}(M) = 0$ if $k < 0$ or $n < k$

特に $H^*_{dR}(M) \cong \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{dR}(M)$ $\left(\begin{array}{l} \Lambda^k(M) = 0 \\ k > n \end{array} \right)$

Example 17.1.6 :

M が 1点集合 (0-mfd) のとき

$$\Lambda^k(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}, \quad d_k = 0 \quad (\forall k)$$

$$\rightsquigarrow H^k_{dR}(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

Example 17.1.7 : $M = \mathbb{R}$ (1-mfd) とする.

このとき $\Lambda^1(M) \cong \{ f dx \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}) \}$

$\Lambda^0(M) \cong C^\infty(\mathbb{R})$

$d_0 : \Lambda^0(M) \to \Lambda^1(M),\ f \mapsto f' dx$

$(d_k = 0 \quad (k \neq 0))$

更に $\mathrm{Im}\, d_0 = \Lambda^1(M)$ (微積分の基本定理を使う)

$\mathrm{Ker}\, d_0 = \{$定数関数 on $\mathbb{R}\}$

これより

$H^1_{dR}(M) = \Lambda^1(M) / \mathrm{Im}\, d_0 = \Lambda^1(M) / \Lambda^1(M) \cong 0$

$H^0_{dR}(M) = \mathrm{Ker}\, d_0 = \{$定数関数 on $\mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$

Example 17.1.8 : $M = S^1$ (1-mfd) とする.

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とみなす.

$C^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, f(t+n) = f(t) \ \begin{matrix} \forall t \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right\}$

とおく. $\cong C^\infty(S^1)$

このとき

$$\Lambda^1(S^1) \cong \{ f\,dx \mid f \in C^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} \} \ (= \Lambda^1(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}})$$

$$\Lambda^0(S^1) \cong C^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$$

$$d_0 : \Lambda^0(S^1) \to \Lambda^1(S^1), \ f \mapsto f'dx$$

更に $\quad \operatorname{Im} d_0 = \{ g\,dx \mid g \in C^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}},\ \int_0^1 g\,dx = 0 \}$

$\operatorname{Ker} d_0 = \{$定数関数$\}$

これより

$$H^1_{dR}(M) = \Lambda^1(M) / \operatorname{Im} d_0 = \{ g\,dx \mid g \in C^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} \} \big/ \{ \textstyle\int_0^1 g\,dx = 0 \} \cong \mathbb{R}[dx] \cong \mathbb{R}$$

$H^0_{dR}(M) = \operatorname{Ker} d_0 = \{$定数関数$\} \cong \mathbb{R}$

Example 17.1.9 : $M = \mathbb{T} = S^1 \times S^1$ (2次元トーラス)

$\mathbb{T} = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ とみなす.

$C^\infty(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}^2} := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \mid f(s,t) = f(s+n, t+m) \quad \forall s,t \in \mathbb{R},\ n,m \in \mathbb{Z} \}$

とおく.

$\Omega^2(M) = \{ f\, dx \wedge dy \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}^2} \}$

$\Omega^1(M) = \{ g\, dx + h\, dy \mid g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}^2} \}$

$\Omega^0(M) = C^\infty(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}^2}$

$$d_1 : \Omega^1(M) \to \Omega^2(M), \quad g\,dx + h\,dy \mapsto \left(-\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx \wedge dy$$

$$d_0 : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M), \quad f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

$$\operatorname{Im} d_1 = \left\{ f\,dx \wedge dy \;\middle|\; \int_0^1\!\!\int_0^1 f\,dx\,dy = 0 \right\}$$

$$\operatorname{Ker} d_1 = \left\{ g\,dx + h\,dy \;\middle|\; g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}^2},\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \right\}$$

$$\operatorname{Im} d_0 = \left\{ g\,dx + h\,dy \;\middle|\; \begin{array}{l} g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}^2}, \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial x},\ \displaystyle\int_0^1 g(x,0)\,dx = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 h(0,y)\,dy = 0 \end{array} \right\}$$

$$\operatorname{Ker} d_0 = \{ \text{定数関数} \}$$

特に $H^2_{dR}(M) \cong \mathbb{R}[dx \wedge dy] \cong \mathbb{R}$

$H^1_{dR}(M) \cong \mathbb{R}[dx] \oplus \mathbb{R}[dy] \cong \mathbb{R}^2$

$H^0_{dR}(M) \cong$ {定数関数} $\cong \mathbb{R}$

追加

Theorem 17.1.10:

M_1, M_2 : n-mfds with corners とし

M_1 と M_2 は位相空間として homotopic であるとする.

このとき $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$H^k_{dR}(M_1)$ と $H^k_{dR}(M_2)$ はベクトル空間として同型

Section 18 で論じる.

Section 17.2: de Rham 準同型と de Rham の定理

設定: M: n-mfd w.c.

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

ゴール: $H^k_{dR}(M)$ の各元を

$H^{\infty}_k(M;\mathbb{R})$ 上の線型汎関数

とみなしたい.

Def 17.2.1 :

$\Delta^k(M) \times C_k^\infty(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を以下で定める.

$$(\omega, c) \longmapsto \int_c \omega$$

$c = \underset{\substack{i \\ \text{有限和}}}{\sum} a_i (\tau_i, \sigma_+^k) \quad (a_i \in \mathbb{R})$ と書いたとき

$\tau_i : \Delta^k \to M : C^\infty$-map

$$\int_c \omega := \sum_i a_i \int_{(\Delta_k, \sigma_+^k)} \underbrace{\tau_i^* \omega}_{\in \Delta^k(\Delta_k) = \Delta_c^k(\Delta_k)}$$

(特に: $\displaystyle\int_{(\tau_i, \sigma_-^k)} \omega := -\int_{(\tau_i, \sigma_+^k)} \omega$)

Prop 17.2.2 :

$$\Lambda^k(M) \times C_k^\infty(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$ は双線型

$$(\omega, c) \longmapsto \int_c \omega$$

Prop 17.2.3 : $\omega \in \Lambda^{k-1}(M)$, $c \in C_k^\infty(M;\mathbb{R})$ について

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

Stokes' theorem の系

重要!

Theorem 17.2.4

$$H^k_{dR}(M) \times H^\infty_k(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$([\omega], [c]) \mapsto \int_c \omega$$

は well-defined で双線型

Theorem 17.2.4 の証明のアイデア：

well-defined 性について

$\left([\omega_1]=[\omega_2] \Updownarrow \right)$

示 $\forall \omega_1, \omega_2 \in \mathrm{Ker}\, d_k$ with $\omega_1 - \omega_2 \in \mathrm{Im}\, d_{k-1}$

$\forall c_1, c_2 \in \mathrm{Ker}\, \partial_k$ with $c_1 - c_2 \in \mathrm{Im}\, \partial_{k+1}$,

$(\Leftrightarrow [c_1]=[c_2])$

$$\int_{c_1} \omega_1 = \int_{c_2} \omega_2$$

以下を示せば十分：

Thm 13.3.1 と関係

示 ① $\forall \omega \in \mathrm{Ker}\, d_k$, $\forall c \in \mathrm{Im}\, \partial_{k+1}$, $\int_c \omega = 0$

② $\forall \omega \in \mathrm{Im}\, d_{k-1}$, $\forall c \in \mathrm{Ker}\, \partial_k$, $\int_c \omega = 0$

Hint : Prop 17.2.3 (Stokes' thm) $\Rightarrow$ Cor 13.2.5 と関係

Def 17.2.5

$H^k_\infty(M;\mathbb{R}) :=$ ベクトル空間 $H_k^\infty(M;\mathbb{R})$ の(代数的)双対空間

Remark：本来は "$H^k_\infty(M;\mathbb{R})$" は "M 上の k 次 C^∞ 級特異コホモロジー" と解釈するのが自然。(詳細略)

Def 17.2.6 : (de Rham 準同型)

$$\Phi_k : H^k_{dR}(M) \to H^k_{\infty}(M;\mathbb{R}) \text{ を}$$

$$[\omega] \mapsto \Phi_k([\omega])$$

$$\Phi_k([\omega]) : H^{\infty}_k(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$[c] \mapsto \int_c \omega$$

により定める.

Prop 17.2.7 : Φ_k は well-defined で線型

Hint : Thm 17.2.4

Theorem 17.2.8 (de Rham の定理):

$\Psi_k : H^k_{dR}(M) \to H^k_\infty(M;\mathbb{R})$ は線型同型

Cor 17.2.9

M の重要な位相不変量!

$\dim_{\mathbb{R}} H^k_{dR}(M) < \infty$ のとき

$$\dim_{\mathbb{R}} H^k_{dR}(M) = \dim_{\mathbb{R}} H_k(M;\mathbb{R})$$

Hint: Thm 17.2.8, 16.4.4, Section 4.1

(再掲) Theorem 17.2.8 (de Rham の定理):

$\Psi_k : H^k_{dR}(M) \to H^k_\infty(M;\mathbb{R})$ は 線型同型

i.e. ① $\forall \omega \in A^k(M)$ with $d\omega = 0$,

単射性

$$[\omega] = 0 \iff \forall c \in C_k(M;\mathbb{R}) \text{ with } \partial c = 0,\ \int_c \omega = 0$$

de Rham cohomology は homology 探知機としてきちんと働く!

② $\forall c \in C_k(M;\mathbb{R})$ with $\partial c = 0$,

全射性

$$[c] = 0 \iff \forall \omega \in A^k(M) \text{ with } d\omega = 0,\ \int_c \omega = 0$$

homology は de Rham cohomology で探知される!

Example 17.2.10:

M : 1点集合 とく

$$H^k_\infty(M;\mathbb{R}) \underset{\text{de Rham}}{\cong} H^k_{dR}(M) \underset{\text{Ex 17.1.6}}{\cong} \begin{cases} \mathbb{R} & (k=0) \\ 0 & (k\neq 0) \end{cases}$$

特に $H_k(M;\mathbb{R}) \underset{\text{Thm 16.4.4}}{\cong} H^\infty_k(M;\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (k=0) \\ 0 & (k\neq 0) \end{cases}$

$H^\infty_k(M;\mathbb{R})$ は $H^k_\infty(M;\mathbb{R})$ の双対

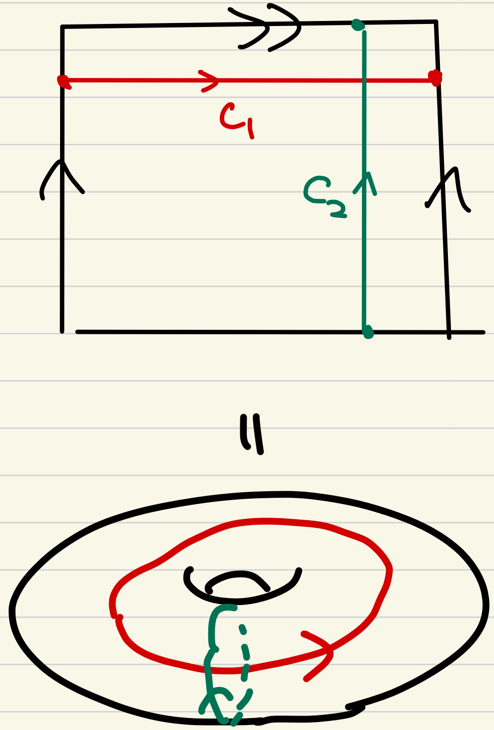
これは Ex 16.2.10 の結果と一致する.

Example 17.2.11:

$M = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ (2次元トーラス) とする.

$H_1(M; \mathbb{R})$ を決定しよう!

$\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ とみなす



$c_1 := (\tau_1, \sigma^1_+)$

$$\tau_1 : \Delta_1 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$
$$(s, t) \mapsto [(s, 0)]$$

$c_2 := (\tau_2, \sigma^1_+)$

$$\tau_2 : \Delta_1 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$
$$(s, t) \mapsto [(0, s)]$$

Claim: $H_1(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}) = \mathbb{R}[c_1]\oplus\mathbb{R}[c_2] \cong \mathbb{R}^2$

Recall (Ex 17.1.9): $H^1_{dR}(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}) = \mathbb{R}[dx]\oplus\mathbb{R}[dy] \cong \mathbb{R}^2$

特に $\dim_{\mathbb{R}} H_1(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}) = 2$ (Cor 17.2.9)

pf: 直接計算で

$\partial c_1 = \partial c_2 = 0$ in $C_0(\mathbb{T}^2;\mathbb{R})$ である.

特に $c_1, c_2 \in \operatorname{Ker}\partial_1$.

示 $[c_1]\neq 0$ かつ $[c_2]\neq 0$ かつ $[c_1]$ と $[c_2]$ は一次独立

in $H_1(\mathbb{T}^2;\mathbb{R})$

いま

$$\Phi_1([dx])([c_1]) = \int_{c_1} dx = \int_{(\Delta_1,\sigma_+^1)} \tau_1^*(dx) = \int_0^1 dx = 1$$

$$\Phi_1([dx])([c_2]) = \int_{c_2} dx = \int_{(\Delta_1,\sigma_+^1)} \underbrace{\tau_2^*(dx)}_{=0} = 0$$

$$\Phi_1([dy])([c_1]) = \int_{c_1} dy = \int_{(\Delta_1,\sigma_+^1)} \underbrace{\tau_1^*(dy)}_{=0} = 0$$

$$\Phi_1([dy])([c_2]) = \int_{c_2} dy = \int_{(\Delta_1,\sigma_+^1)} \tau_2^*(dy) = 1$$

これより

$[c_1] \neq 0$ かつ $[c_2] \neq 0$ かつ $[c_1]$ と $[c_2]$ は一次独立 in $H_1(T^2;\mathbb{R})$

が示せた.

de Rham の定理の証明には

◎ Mayer-Vietoris 完全系列

◎ de Rham cohomology の
C^∞-homotopy 不変性

を用いる.

Section 17.3 : de Rham の定理の証明

設定 : M : n-mfd with corners

de Rham の定理の証明に向けて，以下の言葉を準備しておく：

Def 17.3.1 : M が de Rham $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ de Rham 準同型

$\Phi_k : H^k_{dR}(M) \to H^k_\infty(M; \mathbb{R})$

が線型同型 ($^\forall k$)

Theorem 17.3.2 (de Rham の定理の言い換え : Thm 17.2.8)

任意の mfd with corners は de Rham

次の3つのLemmaを認めてThm 17.3.2を示そう

Lemma 17.3.3: M_1, M_2 : n-mfd with corners

s.t. M_1 と M_2 は deffeo とする.

このとき M_1 が de Rham $\Leftrightarrow$ M_2 が de Rham

Lemma 17.3.4:

C_n 内の任意の凸開集合は de Rham

Recall: $O \subset C_n$ が凸

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in O$, $\forall t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$,

$tx + (1-t)y \in O$

Lemma 17.3.5: M : n-mfd w.c. とする.

仮定 : $^\exists \Theta := \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: M の開基 s.t.

$^\forall I \subset \Lambda$ with $1 \leq \# I \lneqq \infty$, $\displaystyle\bigcap_{i\in I} O_i$: de Rham

結論 : M は de Rham

Proof of Thm 17.3.2 :

Step 1 : C_n の任意の開集合が de Rham であることを示す.

Hint : C_n の開基 $\mathcal{O} := \left\{ \begin{array}{c} p \text{ を中心とする半径 } r \\ \text{の open ball in } C_n \end{array} \middle| \ p \in C_n,\ r \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$

を考えると Lemma 17.3.3 より Lemma 17.3.4 が適用できる

Step 2 : 任意の mfd w.c. $M = (M, \mathcal{A}_M)$ が de Rham であることを示す.

Hint : M の開基 $\mathcal{O} := \left\{ O_0 \ \middle| \ \begin{array}{c} (O, U, u) \in \mathcal{A}_M \\ O_0 \subset O : \text{open} \end{array} \right\}$ を考える.

Step 1 と Lemma 17.3.3 より Lemma 17.3.4 が適用できる.

Lemma 17.3.3, 17.3.4 は Section 18 で示す.

次の2つの Lemma を認めて Lemma 17.3.5 を示しておく.

Lemma 17.3.6 : M : n-mfd w.c. とし,

(Section 19 で示す)

$\{O_1, \cdots, O_N\}$ を M の finite open cover とする.

このとき "$^\forall I \underset{\neq\emptyset}{\subset} \{1, \cdots, N\}$, $\bigcap_{i \in I} O_i$ が de Rham" ならば

M も de Rham

Lemma 17.3.7 : $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: n-mfd w.c. の族とする.

(Section 20 で示す)

"$^\forall \lambda \in \Lambda$, M_λ が de Rham" ならば

非交和 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ も de Rham

Proof of Lemma 17.3.5 :

示 M は de Rham

Lemma 17.3.6 より 以下を示せば十分

示 $\exists \{O_1, O_2\}$: M の open cover

└ $O_1, O_2, O_1 \cap O_2$ はそれぞれ de Rham

以下のPropositionを使う

Proposition 17.3.8 : M の可算開被覆 $\{V_k\}_{k=1,2,\ldots}$ であって

$$\begin{cases} V_k \text{ は 相対 compact in } M, \\ \overline{V_k} \subset V_{k+1} \quad (\forall k) \end{cases}$$

Mにおける閉包

となるものが存在する

(∵ Partitions of Unity の appendix の Section 1.2
(Lemma 1.8 + Lemma 1.9 の証明の Step 2))

M の可算開被覆 $\{V_k\}_{k=1,2,\ldots}$ であって

$$\begin{cases} V_k \text{ は 相対 compact in } M, \\ \overline{V_k} \subset V_{k+1} \quad (\forall k) \end{cases}$$

となるものを fix.

Mにおける閉包

(Prop 17.3.8 より存在する)

各 $k=1,2,\cdots$ について

$$A_k := \overline{V_{2k}} \setminus V_{2k-2}$$

$$\widetilde{A}_k := V_{2k+1} \setminus \overline{V_{2k-3}}$$

（ただし $V_{-2}, V_{-1}, V_0 := \emptyset$ とする）

とおく.

このとき

$$\begin{cases} \bigcup_k A_k = M, \\ A_k \text{ は compact } (\forall k), \\ A_k \subset \widetilde{A}_k \text{ かつ } \widetilde{A}_k \text{ は open in } M \ (\forall k), \\ \widetilde{A}_k \cap \widetilde{A}_l \neq \emptyset \Rightarrow |k-l| \leq 1, \end{cases}$$

に注意.

仮定より $\mathcal{O} := \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: M の開基 s.t.

${}^\forall I \subset \Lambda$ with $1 \leq \# I \lneq \infty$, $\bigcap_{i\in I} O_i$: de Rham

となるものが選ばれるのでとる.

各 $k = 1, \cdots,$ 各 $p \in A_k$ について

$O_p^k \in \mathcal{O}$ であって $p \in O_p^k \subset \tilde{A}_k$ となるものを fix.

また 各 k について compact set A_k の open cover $\{O_p^k\}_{p\in A_k}$

の finite subcover $\{O_{p_1}^k, \cdots, O_{p_{N_k}}^k\}$ を fix.

ここで $i=1,2$ について

$$\mathcal{O}_i := \bigcup_{\substack{k\equiv i \\ \mathrm{mod}\,2}} \bigcup_{l=1}^{N_k} \mathcal{O}^k_{p_l} \subset M$$ とおく.

このとき $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2\}$ は M の open cover

($\text{Recall}: \bigcup_k A_k = M$)

(示) $\underbrace{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2}_{①}, \underbrace{\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2}_{②}$ は有限次 de Rham

① O_1, O_2 は de Rham であることを示す.

$i = 1, 2$ を fix.

Recall : $$O_i := \bigcup_{\substack{k \equiv i \\ \mathrm{mod}\, 2}} \bigcup_{l=1}^{N_k} O^k_{p_l} .$$

各 k について $\{O^k_{p_l}\}_{l=1,\cdots,N_k}$ のとり方より

$$\forall I \underset{\neq \emptyset}{\subset} \{1, \cdots, N_k\}, \ \bigcap_{l \in I} O^k_{p_l} \text{ は de Rham}$$

特に Lemma 17.3.6 より $\bigcup_{l=1}^{N_k} O^k_{p_l}$ は de Rham

"$O_p^k \subset \tilde{A}_k$" と "$\hat{A}_k \cap \hat{A}_\ell \neq \emptyset \Rightarrow |k-\ell| \leq 1$" より

$$O_i = \underbrace{\bigsqcup_{\substack{k \equiv i \\ \mathrm{mod}\, 2}}}_{\text{disjoint}} \bigcup_{\ell=1}^{N_k} O_{p_\ell}^k$$

となるので Lemma 17.3.7 より O_i も de Rham.

① 終わり

② $O_1 \cap O_2$ は de Rham であることを示す。

$$O_1 \cap O_2 = \bigcap_{i=1,2} \bigcup_{k \equiv i \bmod 2} \bigcup_{l=1}^{N_k} O^k_{P_l} \quad \text{であるが}$$

" $O^k_p \subset \hat{\tilde{A}}_k$ " と " $\hat{\tilde{A}}_k \cap \hat{\tilde{A}}_l \neq \emptyset \Rightarrow |k-l| \leq 1$ " より

$$O_1 \cap O_2 = \underbrace{\bigsqcup_k}_{\text{disjoint}} \left(\left(\bigcup_{l=1}^{N_k} O^k_{P_l} \right) \cap \left(\bigcup_{s=1}^{N_{k+1}} O^{k+1}_{P_s} \right) \right)$$

$$= \bigsqcup_k \left(\bigcup_{l=1}^{N_k} \bigcup_{s=1}^{N_{k+1}} \left(O^k_{P_l} \cap O^{k+1}_{P_s} \right) \right)$$

$\{O^k_p\}$ のとり方と Lemma 17.3.6, 17.3.7 より $O_1 \cap O_2$ は de Rham.

(詳細略)

② 終わり ☒

未証明

Lemma 17.3.3 : Section 18 へ

Lemma 17.3.4 : Section 18 へ

Lemma 17.3.6 : Section 19 へ

Lemma 17.3.7 : Section 20 へ