Section 18 : C^∞-homotopy と de Rham cohomology

C^∞-homotopy に関連する命題の紹介

特に Section 17 で紹介した以下の3つの命題を示す.
(Lemma 17.3.3, 17.3.4 は de Rham の定理の証明に用いた)

再掲

Theorem 17.1.10 :

M_1, M_2 : n-mfds with corners とし
M_1 と M_2 は位相空間として homotopic であるとする.
このとき $\forall k \in \mathbb{Z}$,
$H^k_{dR}(M_1)$ と $H^k_{dR}(M_2)$ はベクトル空間として同型

Lemma 17.3.4 :

$\mathbb{C}^n$ 内の任意の凸開集合は de Rham

Lemma 17.3.3 : M_1, M_2 : n-mfd with corners
s.t. M_1 と M_2 は diffeo とする.
このとき M_1 が de Rham $\Leftrightarrow$ M_2 が de Rham

Section 18.1 : C^∞-map の誘導準同型

設定 : M_i : n_i-mfd w.c. $(i=1,2)$

$f : M_1 \to M_2$: C^∞-map

記号 : $f^* : A^k(M_2) \to A^k(M_1)$: 引き戻し

$(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

(see Section 13.1)

de Rham cohomology について

Prop 18.1.1: $f^*: \Omega^*(M_2) \to \Omega^*(M_1)$ は余鎖複体準同型

(Hint: Thm 13.1.5)

Def 18.1.2:

$$H_{dR}(f) := H(f^*) : H^*_{dR}(M_2) \to H^*_{dR}(M_1)$$

de Rham cohomology の間の誘導準同型

Theorem 18.1.3

H_{dR} は mfd w.c. と C^∞-map の圏から
次数付きベクトル空間と
次数を保つ線型写像の圏
への反変関手

$$\left(\begin{array}{l} H_{dR}(id) = id, \\ H_{dR}(f \circ g) = H_{dR}(g) \circ H_{dR}(f) \end{array}\right)$$

C^∞-singular homology について

R : 可換環 とする.

Prop 18.1.4 : (Prop 16.3.1 の C^∞級版)

$$f^\infty_* := f_*|_{C^\infty(M_1;R)} : C^\infty(M_1;R) \to C^\infty(M_2;R)$$

は well-defined で R 鎖複体準同型

Def 18.1.5 :

$$H^\infty(f) := H(f^\infty_*)$$

$$: H^\infty_k(M_1;R) \to H^\infty_k(M_2;R)$$

C^∞- singular homology の間の誘導準同型

Theorem 18.1.6 :

H^∞ は mfd w.c. と C^∞-map の圏から

次数付 $\mathbb{R}$ 加群と

次数を保つ $\mathbb{R}$ 加群準同型の圏

への(共変)関手

$$\left(\begin{aligned} &H^\infty(id) = id \\ &H^\infty(f \circ g) = H^\infty(f) \circ H^\infty(g) \end{aligned}\right)$$

de Rham 準同型について

Theorem 18.1.7 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

$\forall c \in C_k^\infty(M_1;\mathbb{R})$, $\forall \omega \in \Lambda^k(M_2)$

$$\int_{f_*^\infty c} \omega = \int_c f^*\omega$$

Hint: $(f \circ \tau_i)^*\omega = \tau_i^*(f^*\omega)$

Recall: $H^k_\infty(M_i;\mathbb{R}) :=$ ベクトル空間 $H^\infty_k(M_i;\mathbb{R})$ の双対空間

Def 18.1.8:

$$H_\infty(f) := H^\infty(f)^\vee : H^\infty_k(M_2;\mathbb{R}) \to H^\infty_k(M_1;\mathbb{R})$$

(i.e. 各 $\alpha \in H^\infty_k(M_2;\mathbb{R})$ について

$$\begin{aligned} H_\infty(f)(\alpha) : H^k_\infty(H_1;\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \alpha(H^\infty(f)(\gamma)) \\ &\qquad = \langle \alpha, H^\infty(f)(\gamma) \rangle \end{aligned}$$

)

記号 : $\Phi_i : H^*_{dR}(M_i) \to H^*_\infty(M_i;\mathbb{R})$

de Rham 準同型

Theorem 18.1.9 :

$$\begin{tikzcd}
H^*_{dR}(M_2) \arrow[r, "\Phi_2"] \arrow[d, "H_{dR}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^*_\infty(M_2;\mathbb{R}) \arrow[d, "H_\infty(f)"] \\
H^*_{dR}(M_1) \arrow[r, "\Phi_1"'] & H^*_\infty(M_1;\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

Hint Thm 18.1.7

Section 18.2 : C^∞-homotopy

設定 : M_i : n_i-mfd w.c. $(i=1,2)$

$f, g : M_1 \to M_2$: C^∞-map

Def 18.2.1 :

f と g が C^∞-homotope

$\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\exists P : M_1 \times [0,1] \to M_2$: C^∞-map

f から g への C^∞-homotopy

$P(x,0) = f(x)$

$P(x,1) = g(x)$

de Rham cohomology について

Theorem 18.2.2 :

$f, g : M_1 \to M_2$: C^∞-maps が

C^∞-homotope であるとする.

このとき $f^*, g^* : \Lambda^*(M_2) \to \Lambda^*(M_1)$

は 複体準同型 として homotope.

特に $H_{dR}(f) = H_{dR}(g) : H^*_{dR}(M_2) \to H^*_{dR}(M_1)$.

(再掲) Theorem 18.2.2 :

$f, g : M_1 \to M_2$: C^∞-maps が C^∞-homotope であるとする.

このとき $f^*, g^* : A^*(M_2) \to A^*(M_1)$ は複体準同型として homotope.

特に $H_{dR}(f) = H_{dR}(g) : H^*_{dR}(M_2) \to H^*_{dR}(M_1)$.

Hint: $S : A^{k+1}(M_1 \times [0,1]) \to A^k(M_1)$ を
$\omega \mapsto S\omega$

$$(S\omega)_x(v_1, \cdots, v_k) := \int_0^1 \omega_{(x,t)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(x,t)}, v_1, \cdots, v_k\right)dt$$

$(v_1, \cdots, v_k \in T_x M_1)$

$T_{(x,t)}(M_1 \times [0,1])$ の元とみなす

と定める.

このとき $S \circ P^*$ が f^* と g^* の間の homotopy になる.

C^∞-singular homology について

R : 可換環とする.

Theorem 18.2.3 (Thm 16.2.5 の C^∞ 版)

$f, g : M_1 \to M_2$: C^∞-maps が

C^∞-homotope であるとする.

このとき $f^\infty_*, g^\infty_* : C^\infty_*(M_1; R) \to C^\infty_*(M_2; R)$

は複体準同型として homotope.

特に $H^\infty(f) = H^\infty(g) : H^\infty_*(M_1; R) \to H^\infty_*(M_2; R)$

Section 18.3 : C^∞-homotopy 不変性

設定 : M_i : n_i-mfd w.c. $(i=1,2)$

Def 18.3.1 : M_1 と M_2 が C^∞-homotopic

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists f : M_1 \to M_2$, $\exists g : M_2 \to M_1$: C^∞-maps,

s.t. $\underset{C^\infty\text{-homotope}}{f \circ g \simeq id_{M_2}}$, $\underset{C^\infty\text{-homotope}}{g \circ f \simeq id_{M_1}}$

Theorem 18.3.2 : M_1 と M_2 が C^∞-homotopic とする.

このとき $H^k_{dR}(M_1) \simeq H^k_{dR}(M_2)$

$H^\infty_k(M_1; R) \simeq H^\infty_k(M_2; R)$

($\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall R$: 可換環)

Hint : Thm 18.1.3, 18.1.6

18.2.2, 18.2.3 の系

Lemma 17.3.3, 17.3.4 を示そう：

再掲 **Lemma 17.3.3**：M_1, M_2 : n-mfd with corners
s.t. M_1 と M_2 は diffeo とする.

このとき M_1 が de Rham $\Leftrightarrow$ M_2 が de Rham

再掲 **Lemma 17.3.4**：

C_n 内の任意の凸開集合は de Rham

まず次の Lemma が成り立つ：

Lemma 18.3.3： M_1 と M_2 が C^∞-homotopic とする.

以下は同値

(i) M_1 は de Rham

(ii) M_2 は de Rham

Hint： Thm 18.1.9, 18.2.2, 18.2.3 の系

Lemma 17.3.3 は Lemma 18.3.3 から従う

(diffeo $\Rightarrow$ C^∞-homotopic)

Lemma 17.3.4 は 以下の Proposition と Lemma および Lemma 18.3.3 から従う.

Proposition 18.3.4: C_n の任意の凸開集合$_{\neq\emptyset}$ は 1点集合と C^∞-homotopic

Hint: $O_{\neq\emptyset}$: 凸開 in C_n, $\{x\}$: 1点集合. $p_0 \in O$ を fix.

$f: O \to \{x\},\ p \mapsto x,\quad g: \{x\} \to O,\ x \mapsto p_0$ とする.

このとき $f \circ g = id_{\{x\}},\quad g \circ f \underset{C^\infty\text{-homotope}}{\simeq} id_O$

$\left(P: O \times [0,1] \to O,\ (p,\tau) \mapsto \tau p_0 + (1-\tau)p \text{ とおけばよい} \right)$

Lemma 18.3.5: 1点集合は de Rham

Hint: Ex 17.2.10 の直接計算

Thm 17.1.10 について：

再掲 Theorem 17.1.10 :

M_1, M_2 : n-mfds with corners とし

M_1 と M_2 は位相空間として homotopic であるとする。

このとき $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$H^k_{dR}(M_1)$ と $H^k_{dR}(M_2)$ はベクトル空間として同型

Hint : Thm 18.3.2 と以下の fact を使う：

Fact (see Lee "Introduction to smooth manifolds" : Thm 6.19, 6.20)

M_1 と M_2 が位相空間として homotopic なら C^∞-homotopic