Section 19 : Mayer-Vietris 完全系列

Mayer-Vietris 完全系列 の紹介

特に Lemma 17.3.6 (de Rham の定理の証明に用いた)

を示す:

再掲 Lemma 17.3.6 : M : n-mfd w.c. とし,
$\{O_1, \cdots, O_N\}$ を M の finite open cover とする.
このとき "$\forall I \underset{\neq\emptyset}{\subset} \{1, \cdots, N\}$, $\bigcap_{i \in I} O_i$ は de Rham" ならば
M も de Rham

Section 19.1 完全系列

設定 : R : 可換環

Def 19.1.1 : $a, b \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a < b$

V_i : R加群 $(a \leq i \leq b)$

$f_i : V_i \to V_{i+1}$: R加群準同型

$(a \leq i \leq b-1)$

とする.

列 $(\{V_i\}_i, \{f_i\}_i)$ が exact (完全)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Im} f_i = \mathrm{Ker} f_{i+1}$ $(a \leq i \leq b-2)$

Prop 19.1.2: (A, ∂) : R複体とする.

$$A \xrightarrow[\partial]{} A \xrightarrow[\partial]{} A \text{ が exact}$$

$$\Longleftrightarrow \quad H(A, \partial) = 0$$

(homology は exact からの"ずれ"を定量化したもの)

Prop 19.1.3: A, B, C : R加群

$f : A \to B,\ g : B \to C$ とする.

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow[f]{} B \xrightarrow[g]{} C \xrightarrow[0]{} 0 \text{ が exact}$$

(short exact sequence)

$\Longleftrightarrow$ f は単射, g は全射, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\, g$

Section 19.2: 複体の短完全列と連結準同型

設定: R: 可換環

$(A, \partial^A), (B, \partial^B), (C, \partial^C)$: R複体,

$f : A \to B$, $g : B \to C$: R複体準同型

s.t.

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0 \quad : \text{exact}$$

記号: $H(f) : H(A, \partial^A) \to H(B, \partial^A)$

$H(g) : H(B, \partial^B) \to H(C, \partial^C)$: 誘導準同型

Theorem 19.2.1 :

$$H(A,\partial^A) \xrightarrow{H(f)} H(B,\partial^B) \xrightarrow{H(g)} H(C,\partial^C)$$

is exact (i.e. $\operatorname{Ker} H(g) = \operatorname{Im} H(f)$)

Hint : (π)

① $\operatorname{Ker} H(g) \supset \operatorname{Im} H(f)$

i.e. $\forall a \in \operatorname{Ker} \partial^A$, $(g \circ f)(a) \in \operatorname{Im} \partial^C$

(easy)

② $\operatorname{Ker} H(g) \subset \operatorname{Im} H(f)$

i.e. $\forall b \in \operatorname{Ker} \partial^B$ with $gb \in \operatorname{Im} \partial^C$,

$\exists a \in \operatorname{Ker} \partial^A$ s.t. $b - fa \in \operatorname{Im} \partial^B$

やる事: 連結準同型

$\delta : H(C, \partial^C) \to H(A, \partial^A)$ を定める.

Prop 19.2.2 $c \in \operatorname{Ker} \partial^C$ とする.

このとき

$$\text{足}_c := \{ (b, a) \in B \times \operatorname{Ker} \partial^A \mid g b = c,\ \partial^B b = f a \} \neq \emptyset$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \arrow[r] & 0 \ \text{(exact)} \\
& & b \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & c \arrow[d, mapsto] & \\
& a \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \partial b = f a \arrow[r, mapsto] & 0 & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}$$

再掲 **Prop 19.2.2** $c \in \operatorname{Ker} \partial^C$ とする.

このとき

$$\Box_c := \{ (b, a) \in B \times \operatorname{Ker} \partial^A \mid gb = c,\ \partial^B b = fa \} \neq \emptyset$$

Prop 19.2.3 :

$c_1, c_2 \in \operatorname{Ker} \partial^C$ with $[c_1] = [c_2]$ in $H(C, \partial^C)$ とする.

(i.e. $c_1 - c_2 \in \operatorname{Im} \partial^C$)

このとき $\forall (a_1, b_1) \in \Box_{c_1}$, $\forall (a_2, b_2) \in \Box_{c_2}$,

$$[a_1] = [a_2] \text{ in } H(A, \partial^A)$$

(i.e. $a_1 - a_2 \in \operatorname{Im} \partial^A$)

Theorem 19.2.3 : $\delta : H(C, \partial^C) \to H(A, \partial^A)$

連結準同型 $\quad [c] \mapsto [a]$

$\left(\begin{array}{l} a \in \mathrm{Ker}\, \partial^A \text{ は} \\ {}^{\exists} b \in B \text{ s.t. } (a, b) \in \Xi_c \\ \text{となるもの} \end{array} \right)$

は well-defined で R 加群準同型

Hint : Prop 19.2.3. R 加群準同型であることは easy.

Theorem 19.2.4

$H(B, \partial^B) \xrightarrow{H(g)} H(C, \partial^C) \xrightarrow{\delta} H(A, \partial^A) \xrightarrow{H(f)} H(B, \partial^B)$ は exact

Hint : 示 $\quad \mathrm{Ker}\, \delta = \mathrm{Im}\, H(g)$

$\mathrm{Ker}\, H(f) = \mathrm{Im}\, \delta$

Def 19.2.5

$$
\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, "\partial"'] \\
H(A,\partial^A) \arrow[r, "H(f)"'] & H(B,\partial^B) \arrow[r, "H(g)"] & H(C,\partial^C) \arrow[dll, "\partial"'] \\
H(A,\partial^A) \arrow[r, "H(f)"'] & H(B,\partial^B) \arrow[r, "H(g)"] & H(C,\partial^C) \arrow[dll, "\partial"'] \\
H(A,\partial^A) \arrow[r, "H(f)"'] & H(B,\partial^B) \arrow[r, "H(g)"] & H(C,\partial^C) \arrow[dl, "\partial"] \\
 & \cdots &
\end{tikzcd}
$$

を複体の short exact sequence

$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ の誘導する

Mayer-Vietoris exact sequence という

Section 19.3 : 鎖複体, 余鎖複体の Mayer - Vietris 完全系列

@ 鎖複体について

設定 : R : 可換環

(A, ∂^A), (B, ∂^B), (C, ∂^C) : R鎖複体,

$f : A \to B$, $g : B \to C$: R鎖複体準同型

s.t.

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0 \quad : \text{exact}$$

記号 : $\delta : H(C, \partial^C) \to H(A, \partial^A)$: 連結準同型

Prop 19.3.1 : $\delta(H_k(C,\partial^C)) \subset H_{k-1}(A,\partial^A)$

Cor 19.3.2 :

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, "\delta"'] \\
H_{k+1}(A,\partial^A) \arrow[r, "H(f)"'] & H_{k+1}(B,\partial^B) \arrow[r, "H(g)"] & H_{k+1}(C,\partial^C) \arrow[dll, "\delta"] \\
H_k(A,\partial^A) \arrow[r, "H(f)"'] & H_k(B,\partial^B) \arrow[r, "H(g)"] & H_k(C,\partial^C) \arrow[dll, "\delta"] \\
H_{k-1}(A,\partial^A) \arrow[r, "H(f)"'] & H_{k-1}(B,\partial^B) \arrow[r, "H(g)"] & H_{k-1}(C,\partial^C) \arrow[dl, dash, "\delta"] \\
 & \cdots &
\end{tikzcd}$$

is exact

◎ 余鎖複体について

設定： R ： 可換環

$(A, \partial^A), (B, \partial^B), (C, \partial^C)$ ： R余鎖複体，

$f : A \to B,\ g : B \to C$ ： R余鎖複体準同型

s.t.

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{0} 0 \ : \text{exact}$$

記号： $\delta : H(C, \partial^C) \to H(A, \partial^A)$ ：連結準同型

Prop 19.3.3 : $\delta(H^k(C,\partial^C)) \subset H^{k+1}(A,\partial^A)$

Cor 19.3.4 :

$$
\begin{tikzcd}
& & \cdots \arrow[dll, "\delta"'] \\
H^{k-1}(A,\partial^A) \arrow[r, "H(f)"'] & H^{k-1}(B,\partial^B) \arrow[r, "H(g)"] & H^{k-1}(C,\partial^C) \arrow[dll, "\delta"] \\
H^{k}(A,\partial^A) \arrow[r, "H(f)"'] & H^{k}(B,\partial^B) \arrow[r, "H(g)"] & H^{k}(C,\partial^C) \arrow[dll, "\delta"] \\
H^{k+1}(A,\partial^A) \arrow[r, "H(f)"'] & H^{k+1}(B,\partial^B) \arrow[r, "H(g)"] & H^{k+1}(C,\partial^C) \arrow[dl, "\delta", dash] \\
& \cdots &
\end{tikzcd}
$$

is exact

Section 19.4：判係体のMayer-Vietoris完全系列

設定：M：n-mfd w.c.

$\{O_1, O_2\}$：Mの開被覆

（$O_1, O_2, O_1 \cap O_2$ はそれぞれ n-mfd with corners）

記号：

$\iota_i : O_i \hookrightarrow M$：包含写像（$i=1,2$）

j_i：$O_1 \cap O_2 \to O_i$：包含写像（$i=1,2$）

◎ de Rham cohomology について

Theorem 19.4.1 : 余鎖複体の列

$$0 \xrightarrow{0} \Lambda^*(M) \xrightarrow{i_1^* \oplus i_2^*} \Lambda^*(O_1) \oplus \Lambda^*(O_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} \Lambda^*(O_1 \cap O_2) \xrightarrow{0} 0$$

は exact

Hint : ㊟ (i) $i_1^* \oplus i_2^*$ は単射 : easy

(ii) $\mathrm{Ker}\, j_1^* - j_2^* \supset \mathrm{Im}\, i_1^* \oplus i_2^*$: easy

(iii) $\mathrm{Ker}\, j_1^* - j_2^* \subset \mathrm{Im}\, i_1^* \oplus i_2^*$: 貼り合わせ

(iv) $j_1^* - j_2^*$ は全射 : 1の分割を使う

Prop 19.4.2 :

$$\forall \omega \in \Lambda^k(O_1 \cap O_2) \text{ with } d\omega = 0,$$

$$\exists z_\omega \in \Lambda^{k+1}(M) \text{ with } dz_\omega = 0$$

$$\exists (w_1, w_2) \in \Lambda^k(O_1) \oplus \Lambda^k(O_2)$$

s.t. $\begin{cases} \iota_1^* z_\omega = dw_1 \\ \iota_2^* z_\omega = dw_2 \\ \omega = j_1^* w_1 - j_2^* w_2 \end{cases}$

さらに $\delta_{dR}^k : H_{dR}^k(O_1 \cap O_2) \to H_{dR}^{k+1}(M)$

$[\omega] \mapsto [z_\omega]$

は well-defined で 線型写像

Theorem 19.4.3:

$$\begin{tikzcd}
 & & {} \arrow[dll, "\delta_{dR}^{k-2}"'] \\
H^{k-1}_{dR}(M) \arrow[r] & H^{k-1}_{dR}(O_1) \oplus H^{k-1}_{dR}(O_2) \arrow[r] & H^{k-1}_{dR}(O_1 \cap O_2) \arrow[dll, "\delta_{dR}^{k-1}"'] \\
H^{k}_{dR}(M) \arrow[r, "H_{dR}(\iota_1) \oplus H_{dR}(\iota_2)"'] & H^{k}_{dR}(O_1) \oplus H^{k}_{dR}(O_2) \arrow[r, "H_{dR}(j_1) - H_{dR}(j_2)"] & H^{k}_{dR}(O_1 \cap O_2) \arrow[dll, "\delta_{dR}^{k}"'] \\
H^{k+1}_{dR}(M) \arrow[r] & H^{k+1}_{dR}(O_1) \oplus H^{k+1}_{dR}(O_2) \arrow[r] & H^{k+1}_{dR}(O_1 \cap O_2) \arrow[dll, "\delta_{dR}^{k+1}"'] \\
{} & &
\end{tikzcd}$$

is exact

◎ C^∞-singular homology について

R を可換環とする.

Remark 19.4.4

$$0 \to C^\infty_*(O_1\cap O_2;R) \xrightarrow{(j_1)_*\oplus(-(j_2)_*)} C^\infty_*(O_1;R)\oplus C^\infty_*(O_2;R) \xrightarrow{(i_1)_*+(i_2)_*} C^\infty_*(M;R)\to 0$$

が exact になって欲しいが, $(i_1)_*+(i_2)_*$ は全射にならない.

ちょっと工夫する必要がある.

Def 19.4.5 各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$$C_k^\infty(M : \{O_1, O_2\} ; R)$$

$$\begin{cases} := \left\{ \sum_i a_i(\tau_i, \sigma_t^k) \in C_k^\infty(M ; R) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i,\ ^\exists j = 1,2 \text{ s.t.} \\ \tau_i(\Delta_k) \subset O_j \end{array} \right\} & (\text{if } k \geq 0) \\ := 0 & (\text{if } k < 0) \end{cases}$$

また $C_*^\infty(M : \{O_1, O_2\} ; R) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} C_k^\infty(M : \{O_1, O_2\} ; R)$

とおく.

Prop 19.4.6 :

$$\partial C_k^\infty(M;\{O_1,O_2\};R) \subset C_{k-1}^\infty(M;\{O_1,O_2\};R)$$

$$(\forall k\in\mathbb{Z})$$

特に

$$(C_*^\infty(M;\{O_1,O_1\};R),\partial)$$ は

$$(C_*^\infty(M;R),\partial)$$ の部分R鎖複体

Def 19.4.7

$\rho : C_*^\infty(M;\{O_1,O_2\};R) \hookrightarrow C_*^\infty(M;R)$

: 包含写像

Prop 19.4.8

: $\exists \gamma : C_*^\infty(M;R) \to C_*^\infty(M;\{O_1,O_2\};R)$

s.t. $\gamma\circ\rho \underset{\text{homotope}}{\simeq} \mathrm{id}$, $\rho\circ\gamma \underset{\text{homotope}}{\simeq} \mathrm{id}$ (see Section 15.3)

特に $H_k(C_*^\infty(M;\{O_1,O_2\};R),\partial) \xrightarrow[\simeq]{\rho_*} H_k^\infty(M;R)$

Hint: 重心細分を用いて γ を構成する.

以下, $H_k(C_*^\infty(M;\{O_1,O_2\};R),\partial)$ と $H_k^\infty(M;R)$ を同一視する

(各 $k\in\mathbb{Z}$)

Prop 19.4.9 : $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$((i_1)_* + (i_2)_*)(C_k^\infty(O_1;R) \oplus C_k^\infty(O_2;R)) \subset C_k^\infty(M;\{O_1,O_2\};R)$$

Theorem 19.4.10 : 鎖複体の列

$$0 \xrightarrow{0} C_*^\infty(O_1 \cap O_2;R) \xrightarrow{(j_1)_* \oplus (-(j_2)_*)} C_*^\infty(O_1;R) \oplus C_*^\infty(O_2;R) \xrightarrow{(i_1)_* + (i_2)_*} C_*^\infty(M;\{O_1,O_2\};R) \xrightarrow{0} 0$$

は exact

Hint : easy

Prop 19.4.11:

$$\forall c \in C_k^\infty(M : \{O_1, O_2\} ; R) \text{ with } \partial c = 0$$

$$\exists\, a_c \in C_{k-1}^\infty(O_1 \cap O_2 ; R) \text{ with } \partial a_c = 0$$

$$\exists\, (b_1, b_2) \in C_k^\infty(O_1 ; R) \oplus C_k^\infty(O_2 ; R)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} (j_1)_* a_c = \partial b_1 \\ -(j_2)_* a_c = \partial b_2 \\ c = (i_1)_* b_1 + (i_2)_* b_2 \end{cases}$$

さらに

$$\partial_k^\infty : H_k^\infty(M ; R) \to H_{k-1}^\infty(O_1 \cap O_2)$$

$$[c] \mapsto [a_c]$$

は well-defined で R加群準同形,

Theorem 19.4.12 :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & {} \arrow[dll, "\delta_{k+2}^{\infty}"'] \\
H_{k+1}^{\infty}(O_1 \cap O_2 ; R) \arrow[r] & H_{k+1}^{\infty}(O_1 ; R) \oplus H_{k+1}^{\infty}(O_2 ; R) \arrow[r] & H_{k+1}^{\infty}(M ; R) \arrow[dll, "\delta_{k+1}^{\infty}"'] \\
H_{k}^{\infty}(O_1 \cap O_2 ; R) \arrow[r, "H^{\infty}(j_1) \oplus (-H^{\infty}(j_2))"'] & H_{k}^{\infty}(O_1 ; R) \oplus H_{k}^{\infty}(O_2 ; R) \arrow[r, "H^{\infty}(i_1) + H^{\infty}(i_2)"] & H_{k}^{\infty}(M ; R) \arrow[dll, "\delta_{k}^{\infty}"'] \\
H_{k-1}^{\infty}(O_1 \cap O_2 ; R) \arrow[r] & H_{k-1}^{\infty}(O_1 ; R) \oplus H_{k-1}^{\infty}(O_2 ; R) \arrow[r] & H_{k-1}^{\infty}(M ; R) \arrow[dll, "\delta_{k-1}^{\infty}"'] \\
{} & &
\end{tikzcd}
$$

is exact

Section 19.5 : Mayer - Vietoris 完全系列と de Rham 準同型

設定 : M : n-mfd with corners

$\{O_1, O_2\}$: M の開被覆

この節のゴールは Lemma 17.3.6 の証明

再掲 Lemma 17.3.6 : M : n-mfd w.c. とし,
$\{O_1, \cdots, O_N\}$ を M の finite open cover とする.
このとき "$\forall I \underset{\neq\emptyset}{\subset} \{1, \cdots, N\}$, $\bigcap_{i \in I} O_i$ が de Rham" ならば
M も de Rham

Section 19.4 の後半において $R=\mathbb{R}$ の場合を考えよ.

Def 19.5.2 :

線型写像 $\partial_k^\infty : H_k^\infty(M;\mathbb{R}) \to H_{k-1}^\infty(O_1\cap O_2;\mathbb{R})$

$H^\infty(j_i) : H_k^\infty(O_1\cap O_2;\mathbb{R}) \to H_k^\infty(O_i;\mathbb{R})$

$H^\infty(\iota_i) : H_k^\infty(O_i;\mathbb{R}) \to H_k^\infty(M;\mathbb{R})$ $(i=1,2)$

の双対をそれぞれ

$\delta_\infty^k : H_\infty^{k-1}(M;\mathbb{R}) \to H_\infty^k(O_1\cap O_2;\mathbb{R})$

$H_\infty(j_i) : H_\infty^k(O_i;\mathbb{R}) \to H_\infty^k(O_1\cap O_2;\mathbb{R})$

$H_\infty(\iota_i) : H_\infty^k(M;\mathbb{R}) \to H_\infty^k(O_i;\mathbb{R})$ $(i=1,2)$

とおく.

Prop 19.5.3 :

$$
\begin{tikzcd}
 & & {} \arrow[dll, "\delta_\infty^{k-1}"'] \\
H_\infty^{k-1}(M;\mathbb{R}) \arrow[r] & H_\infty^{k-1}(O_1;\mathbb{R}) \oplus H_\infty^{k-1}(O_2;\mathbb{R}) \arrow[r] & H_\infty^{k-1}(O_1 \cap O_2;\mathbb{R}) \arrow[dll, "\delta_\infty^{k}"'] \\
H_\infty^{k}(M;\mathbb{R}) \arrow[r, "H_\infty(i_1) \oplus H_\infty(i_2)"'] & H_\infty^{k}(O_1;\mathbb{R}) \oplus H_\infty^{k}(O_2;\mathbb{R}) \arrow[r, "H_\infty(j_1) - H_\infty(j_2)"] & H_\infty^{k}(O_1 \cap O_2;\mathbb{R}) \arrow[dll, "\delta_\infty^{k+1}"'] \\
H_\infty^{k+1}(M;\mathbb{R}) \arrow[r] & H_\infty^{k+1}(O_1;\mathbb{R}) \oplus H_\infty^{k+1}(O_2;\mathbb{R}) \arrow[r] & H_\infty^{k+1}(O_1 \cap O_2;\mathbb{R}) \arrow[dll, "\delta_\infty^{k+2}"'] \\
{} & &
\end{tikzcd}
$$

is exact

Prop 19.5.4:

de Rham 準同型 は

Thm 19.4.3 の exact sequence から

Prop 19.5.3 の exact sequence への射 (全部可換)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r] & H^{k-1}_{dR}(O_1) \oplus H^{k-1}_{dR}(O_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k-1}_{dR}(O_1 \cap O_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k}_{dR}(M) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k}_{dR}(O_1) \oplus H^{k}_{dR}(O_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^{k}_{dR}(O_1 \cap O_2) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \ (\text{exact}) \\
\cdots \arrow[r] & H^{k-1}_{\infty}(O_1;\mathbb{R}) \oplus H^{k-1}_{\infty}(O_2;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{k-1}_{\infty}(O_1 \cap O_2;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{k}_{\infty}(M;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{k}_{\infty}(O_1;\mathbb{R}) \oplus H^{k}_{\infty}(O_2;\mathbb{R}) \arrow[r] & H^{k}_{\infty}(O_1 \cap O_2;\mathbb{R}) \arrow[r] & \cdots \ (\text{exact})
\end{tikzcd}
$$

Hint: Thm 18.1.9 と次の Lemma

Lemma 19.5.5:

$$\forall a \in C^\infty_k(O_1 \cap O_2; \mathbb{R}) \text{ with } \partial a = 0$$
$$\forall b_i \in C^\infty_{k+1}(O_i; \mathbb{R}) \quad (i=1,2) \qquad \text{s.t.} \quad \begin{cases} (j_1)_* a = \partial b_1 \\ -(j_2)_* a = \partial b_2 \\ c = (i_1)_* b_1 + (i_2)_* b_2 \end{cases},$$
$$\forall c \in C^\infty_{k+1}(M : \{O_1, O_2\}; \mathbb{R}) \text{ with } \partial c = 0$$

$$\forall z \in \mathcal{A}^{k+1}(M) \text{ with } dz = 0$$
$$\forall w_i \in \mathcal{A}^{k}(O_i) \quad (i=1,2) \qquad \text{s.t.} \quad \begin{cases} i_1^* z = dw_1 \\ i_2^* z = dw_2 \\ \omega = j_1^* w_1 - j_2^* w_2 \end{cases},$$
$$\forall \omega \in \mathcal{A}^{k+1}(M) \text{ with } d\omega = 0$$

$$\int_a \omega = \int_c z$$

Hint: Prop 17.2.3 (Stokes' thm の系), Thm 18.1.7.

Lemma 17.3.6 の証明の準備：

Lemma 19.5.1： O_1, O_2, $O_1 \cap O_2$ がそれぞれ de Rham とする.

このとき M は de Rham

Hint： Prop 19.5.4 と次のページの Lemma

(five lemma)

Lemma 19.5.6 (five lemma)

$V_1, \cdots, V_5, W_1, \cdots, W_5$ をベクトル空間$/\mathbb{R}$ とする.

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_2 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_3 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_4 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_4"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_5 \arrow[d, "\phi_5"] & (\text{exact}) \\
W_1 \arrow[r] & W_2 \arrow[r] & W_3 \arrow[r] & W_4 \arrow[r] & W_5 & (\text{exact})
\end{tikzcd}
$$

を線型写像の可換図式とし, 各行は exact とする.

また $\phi_1, \phi_2, \phi_4, \phi_5$ は線型同型とする.

このとき $\phi_3 : V_3 \to W_3$ は線型同型.

再掲 Lemma 17.3.6 : M : n-mfd w.c. とし,
$\{O_1, \cdots, O_N\}$ を M の finite open cover とする.
このとき "$\forall I \underset{\neq\emptyset}{\subset} \{1, \cdots, N\}$, $\bigcap_{i \in I} O_i$ が de Rham" ならば
M も de Rham

証明の Hint : Lemma 19.5.1 を用いて
N についての帰納法で示せばよい