Section 20 : 非交和の de Rham cohomology

この節のゴールは

Lemma 17.3.7 (de Rham の定理の証明に用いた) の証明

再掲 Lemma 17.3.7 : $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: n-mfd w.c. の族とする.

"$\forall \lambda \in \Lambda$, M_λ が de Rham" ならば

非交和 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ も de Rham

Section 20.1：ベクトル空間の直和と直積

設定：Λ：集合

$\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$：ベクトル空間$/\mathbb{R}$の族 indexed by Λ

記号：$\prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$：$\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$の直積

$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda := \{ (v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \mid$ 有限コのλを除いて$v_\lambda = 0 \}$：

$\{V_\lambda\}$の代数的直和

Recall: 各ベクトル空間 W について
$/\mathbb{R}$

$$W^\vee := \{ f : W \to \mathbb{R} \mid f \text{ は線型} \}$$

代数的双対

Prop 20.1.1:

$$\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda\right)^\vee \to \prod_{\lambda\in\Lambda}(V_\lambda^\vee),\quad f \mapsto (f|_{V_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$$

は線型同型

Hint: 逆写像を構成する.

Section 20.2：非交和 の de Rham cohomology と singular homology

設定：Λ：集合

$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$：$n$-mfd with corners の族 indexed by Λ

記号：$\displaystyle\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \{(\lambda, x) \mid \lambda\in\Lambda,\ x\in M_\lambda\}$

：$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の非交和 (n-mfd with corners)

Theorem 20.2.1: $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix.

① $H^k_{dR}\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\right) \to \prod_{\lambda \in \Lambda} H^k_{dR}(M_\lambda)$ は線型同型

$$[\omega] \mapsto \left([\omega|_{M_\lambda}]\right)_{\lambda \in \Lambda}$$

R：可換環とする.

② $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H^\infty_k(M_\lambda ; R) \to H^\infty_k\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda ; R\right)$ は線型同型

$$\left([z_\lambda]\right)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto \left[\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ [z_\lambda] \neq 0}} z_\lambda\right]$$

($z_\lambda \in C^\infty_k(M_\lambda ; R)$ with $\partial z_\lambda = 0$
ただし有限コを除いて $[z_\lambda] = 0$)

Hint：余鎖複体，鎖複体の段階で分解できる.

Section 20.3 : 非交和の de Rham 準同型

設定 : Λ : 集合

$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: family of n-mfds with corners indexed by Λ

記号 : $\Phi_\lambda : H^*_{dR}(M_\lambda) \to H^*_\infty(M_\lambda ; \mathbb{R})$: M_λ の de Rham 準同型 $(\lambda\in\Lambda)$

$$\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \{(\lambda, x) \mid \lambda\in\Lambda,\ x\in M_\lambda\}$$

: $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の非交和 (n-mfd with corners)

$\Phi_\Lambda : H^*_{dR}(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \to H^*_\infty(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda ; \mathbb{R})$: $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ の de Rham 準同型

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

Theorem 20.2.2 より

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_k^\infty(M_\lambda;\mathbb{R}) \text{ と } H_k^\infty(\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda;\mathbb{R}) \text{ を同一視する.}$$

Prop 20.3.1 : $H^k_\infty(\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda;\mathbb{R}) \to \prod_{\lambda\in\Lambda} H^k_\infty(M_\lambda;\mathbb{R})$ は線型同型

$$\alpha \mapsto (\alpha_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

where $\alpha_\lambda := \alpha|_{H_k^\infty(M_\lambda;\mathbb{R})}$

$H_k^\infty(\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda;\mathbb{R})$ の dual

$\cong$

$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_k^\infty(M_\lambda;\mathbb{R})$

Hint : Prop 20.1.1

Theorem 20.3.2 :

$$\begin{tikzcd} H^*_{dR}\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\Phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \prod_{\lambda\in\Lambda} H^*_{dR}(M_\lambda) \arrow[d, "\prod_\lambda \Phi_\lambda"] \\ H^*_\infty\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda ; \mathbb{R}\right) \arrow[r, "\sim"] & \prod_{\lambda\in\Lambda} H^*_\infty(M_\lambda ; \mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

Hint : 以下の Lemma を用いよ.

Lemma 20.3.3 : $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

$\omega \in \Omega^k\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\right)$, $c \in C^\infty_k\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda ; \mathbb{R}\right)$ を fix

$c = \sum_\lambda c_\lambda$ ($c_\lambda \in C^\infty_k(M_\lambda ; \mathbb{R})$) とおく.
(有限和)

このとき $\underbrace{\int_c \omega}_{\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \text{での積分}} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{\int_{c_\lambda} (\omega|_{M_\lambda})}_{M_\lambda \text{での積分}}$.

再掲 Lemma 17.3.7 : $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: n-mfd w.c. の族とする.

"$\forall\lambda\in\Lambda$, M_λ が de Rham" ならば

非交和 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ も de Rham

証明のHint : Thm 20.3.2