先端数学　2020/5/21（前半）

担当：奥田隆幸

題目：対称空間について

$2/4$

@ レポート課題についてはBb9上にアップロードされているファイルを参照，

レポート課題	講義動画
一般論＋具体例	具体例（グラスマン）

内容

§1：研究分野紹介 + この講義について

この動画 §2：グラスマンへの直交群の作用

§3：グラスマンの位相

§4：グラスマンのホモトピー

§2 グラスマンへの直交群の作用

内容 ◎ "グラスマン" $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の定義

◎ 直交群 $O(n)$ の定義

◎ $O(n)$ の $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ への作用

$n > k \geq 1$: 自然数とする.

<u>Def</u>

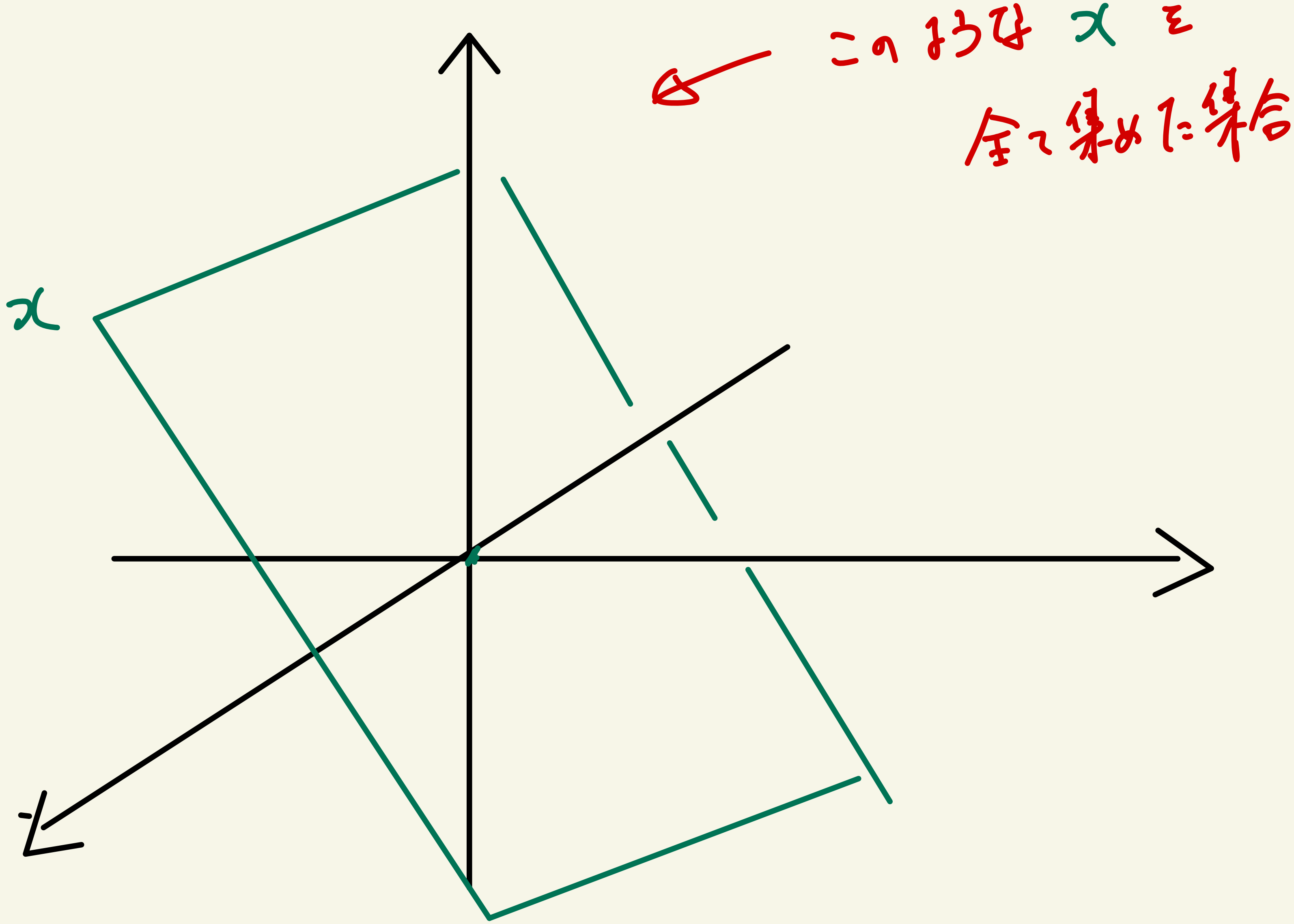
$$Gr_k(\mathbb{R}^n) := \{ x \subset \mathbb{R}^n \mid x \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の } k \text{ 次元線型部分空間} \}$$

(k-グラスマン of $\mathbb{R}^n$)

とおく.

「$x \in \mathbb{R}^n$」ではないことに注意.

$n=3 \quad k=2$ のイメージ



ゴール： $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を"群の言葉"で理解したい

Def： $O(n) := \{ g \in M(n;\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n \}$

(n次直交群)

(つまり直交行列全体の集合)

Fact：

$O(n)$ は行列の積について群をなす.

Def 各 $g \in O(n)$, $x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$ について

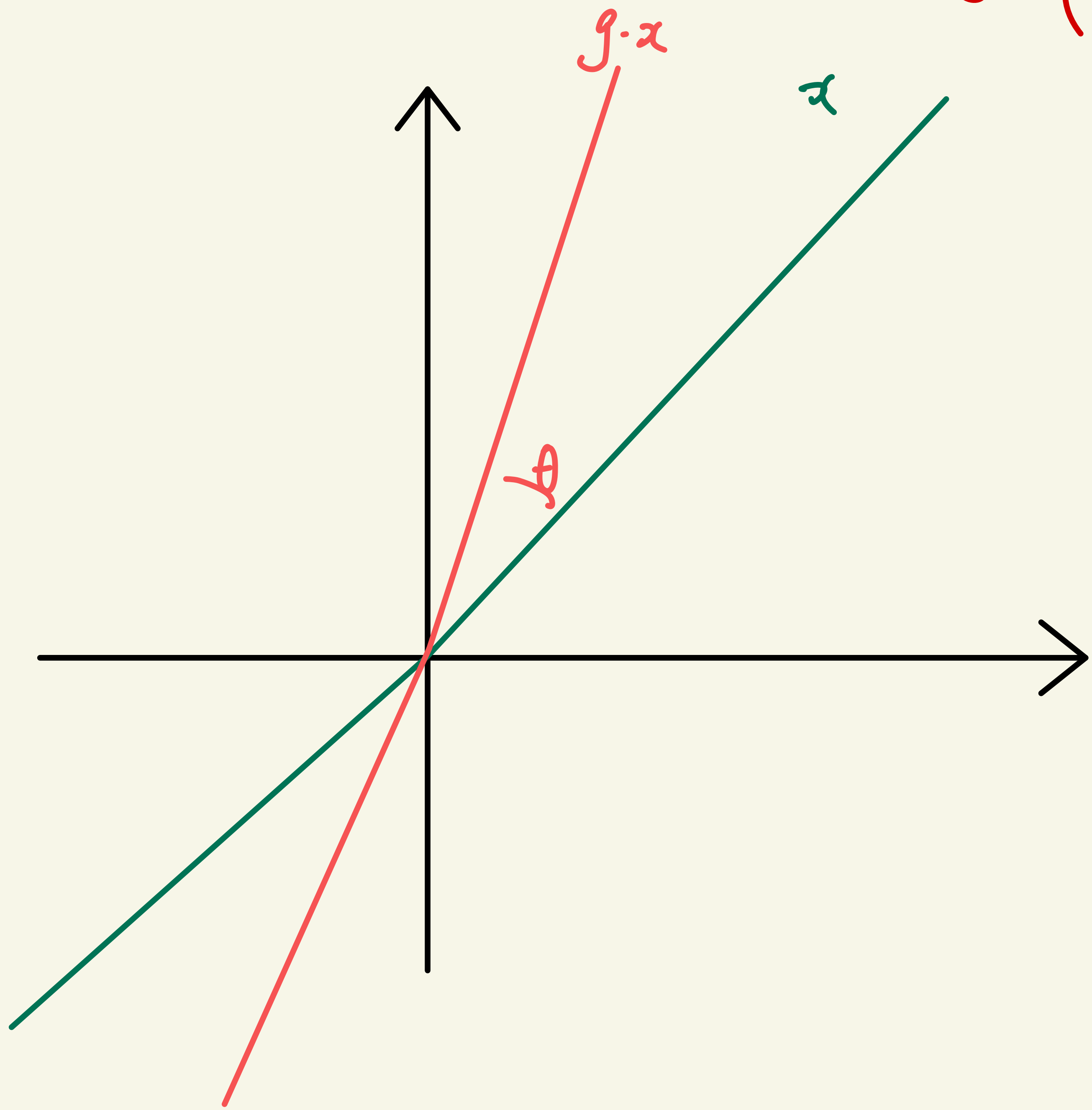
$$g \cdot x := \underbrace{\{gv \mid v \in x \subset \mathbb{R}^n\}}_{\in Gr_k(\mathbb{R}^n)}$$

k次元部分空間 in $\mathbb{R}^n$

とおく.

$n = 2,\ k = 1$ の場合

$$g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O(2)$$



Theorem A : "$(g, x) \mapsto g \cdot x$" は

$O(n)$ の $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ への

推移的な作用を定める.

すなわち

作用
① $\forall g, h \in O(n)$, $\forall x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$, $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$

② $\forall x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$, $I_n \cdot x = x$

推移的
③ $\forall x, y \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$, $\exists g \in O(n)$ s.t. $g \cdot x = y$

が成り立つ

§2 おわり