先端数学　2020/5/21（前半）

担当：奥田隆幸

題目：対称空間について

$3/4$

@ レポート課題については Bb9 上にアップロードされているファイルを参照，

レポート課題	講義動画
一般論＋具体例	具体例（グラスマン）

内容

§1: 研究分野紹介 + この講義について

§2: グラスマンへの直交群の作用

この動画 §3: グラスマンの位相

§4: グラスマンのホモトピー

§3 グラスマンの位相

Recall :

$$Gr_k(\mathbb{R}^n) := \{ x \subset \mathbb{R}^n \mid x \text{ は } k \text{ 次元線型部分空間 in } \mathbb{R}^n \}$$

内容 : $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の位相

ゴール： $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ に"自然な"

位相を定めたい

Recall： $O(n) := \{ g \in M(n;\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_n \}$

n次直交群

$O(n)$ は $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ に

" $g \cdot x := \{ gv \mid v \in x \} \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$ "

により推移的に作用する．

各 $x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$ について

写像 $\pi_x : O(n) \longrightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{array}{ccc} O(n) & \longrightarrow & Gr_k(\mathbb{R}^n) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$$

を考える.

Fact: 作用の推移性から $\pi_x : O(n) \to Gr_k(\mathbb{R}^n)$ は全射

Theorem B $O(n) \subset M(n;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ← 標準位相

は相対位相について 位相群 となる.

Theorem C $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の位相 $\mathcal{O}$ で

次を満たすものが唯一つ存在する.

$$\boxed{\begin{array}{l} {}^{\forall}x \in Gr_k(\mathbb{R}^n), \\ \pi_x : O(n) \to (Gr_k(\mathbb{R}^n), \mathcal{O}) \text{ は連続かつ開} \end{array}}$$

Thm B の位相　　強すぎない　　弱すぎない

Theorem C $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の位相 $\mathcal{O}$ で次を満たすものが唯一つ存在する.

$$\boxed{\begin{array}{l} {}^\forall x \in Gr_k(\mathbb{R}^n), \\ \pi_x : O(n) \to (Gr_k(\mathbb{R}^n), \mathcal{O}) \text{ は連続かつ開} \end{array}}$$

Thm B の位相

強すぎない

弱すぎない

Thm C の Hint: レポート課題 9, 12, "商位相"

Fact Thm C の位相について

$Gr_k(\mathbb{R}^n)$ は コンパクト ハウスドルフ 空間となる.

強すぎない 弱すぎない

§3 おわり