先端数学　2020/5/21（前半）

担当：奥田隆幸

題目：対称空間について

$4/4$

◎ レポート課題については Bb9 上に
アップロードされているファイルを参照,

レポート課題	講義動画
一般論 + 具体例	具体例（グラスマン）

内容

§1: 研究分野紹介 + この講義について

§2: グラスマンへの直交群の作用

§3: グラスマンの位相

この動画 §4: グラスマンのイソトロピー

§4 グラスマンのイソトロピー

Recall:

$O(n)$ は $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ に推移的に作用している.

内容: ◎ イソトロピーの定義

◎ イソトロピーから $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を復元

Def : 各 $x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$ について

$$\underbrace{O(n)^x}_{\text{O(n)の}x\text{におけるイソトロピー部分群}} := \{ g \in O(n) \mid \underbrace{g \cdot x = x}_{} \}$$

とおく.

Fact : $O(n)^x$ は $O(n)$ の部分群

$x \in Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を固定する.

$G := O(n)$, $H := O(n)^x$ とおく.

更に

$G/H := \{ [g]_H \mid g \in G \}$: 右 H 剰余類全体空間

（位相は商位相）

g の右 H 剰余類

$[g]_H = \{ gh \mid h \in H \} \subset G$

Theorem D

写像 $\pi_x : G = O(n) \twoheadrightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$ は

同相写像 $G/H \xrightarrow{\sim} Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を誘導する.

Theorem D 写像 $\pi_x : G = O(n) \twoheadrightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$ は

同相 $G/H \simeq Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を誘導する.

これより 「位相空間 $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の研究」

を原理的には

① $G = O(n)$ の研究

② $H = O(n)^x$ の研究

③ $H \hookrightarrow G$ の研究

に分解できる!!

§4 おわり