Section 1 : イントロダクション

内容 : 多様体論

扱うトピック :

- C^∞-多様体
- 接空間
- C^∞-写像とその微分
- ベクトル場 (微分方程式)

Recall：位相空間 … 連続性のギロンができる集合

（"開集合系"を定めた）

多様体：微積分のギロンができる位相空間

（"局所座標系"を定める）

幾何学Aでは多様体上の微分論を扱う

（積分論は幾何学D）

モチベーションの1つ：“位相空間上の微分方程式”を定義したい。

例：地球上の気象変動を表す数理モデルを作りたい。

⇝「2次元球面上で“微分方程式”を考える」

というモデルを考えたい。

⇝ そもそも 2次元球面上の“微分方程式”の定義を

（数学者の仕事） きちんと与えておく必要がある。

◎ 何が難しいか.

$S^2 := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ とおく,

S^2 上の関数 $f : S^2 \to \mathbb{R}$ を考える.

"f の偏導関数" はどうやって定義する?

失敗例

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$ とおく.

$((x, y, z) \in S^2)$

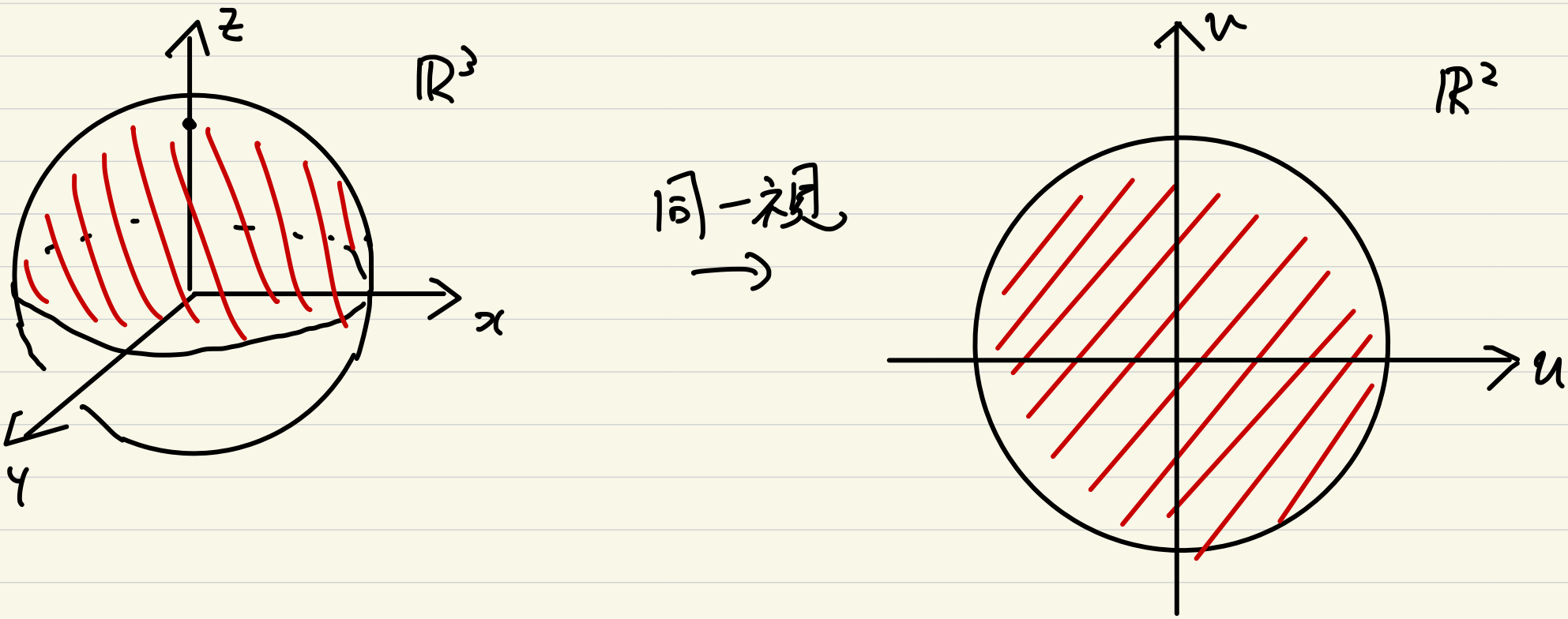
f は S^2 上でのみ定義されているので

$f(x+h, y, z)$ は定義されてない.

◎ アイディア

局所的に座標を与える（多様体論の中心的アイディア）

⇝ 局所的に偏導関数が定義できる.



この場合，北半球上で $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ を考えることができる.

更に"ベクトル場"の概念を用いると
大域的に微分方程式が定義できる!

⇝ 大域幾何, 解析学の土台となる.

例: ド・ラーム理論(空間の形と微分方程式の関係)
リーマン幾何, シンプレクティック幾何
(力学の土台)

対称空間上の調和解析など
("波"の解析)

講義全体の流れ

Part I : 多変数の微分論を代数的に捉える.

Part II : 可微分多様体の定義, 構成

Part III : 可微分多様体上の各種概念

注意 : Part I が最も難しい

Part II はひたすらややこしい.

時間をかけないと頭に入らない

Part III は Part I, Part II が頭に入っていれば難しくない

(4) この講義では"定義"を重んじる。

理解の最低ライン：講義ノートなどを見ながら
各種定義を厳密に運用できる。
また基本的な例について計算できる。

より深い理解：各種定義を自分で再現できる。
また各定義の必然性や一般化
について考えることができる。

Section 1 終