

Section 2 : $\mathbb{R}$ 代数

意義 : “微分論”を代数的に捉えよう
ための言葉の準備

Part I : 多変数の微分論の代数化

Section 2 $\mathbb{R}$ 代数 ★

3 C^∞ 関数

4 方向微分

5 写像の微分

6 合成写像の微分

内容

① $\mathbb{R}$ 代数の定義

② 関数の値可 $\mathbb{R}$ 代数

③ 線型作用素の値可 $\mathbb{R}$ 代数

④ $\mathbb{R}$ 代数の各種性質

Section 2.1 : $\mathbb{R}$ 代数の定義と例

Def 2.1.1 (双線型写像)

V_1, V_2, W は実ベクトル空間とする。

写像 $F : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ を双線型

$\stackrel{\text{def}}{\iff} F$ は第一、第二変数それぞれについて線型

i.e. $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \forall b \in V_2, F^b : V_1 \rightarrow W, a \mapsto F(a, b) \text{ は線型} \\ \textcircled{2} \forall a \in V_1, F_a : V_2 \rightarrow W, b \mapsto F(a, b) \text{ は線型} \end{array} \right.$

Def 2.1.2 (R 代数)

V は 実ベクトル空間 とす。

V 上の 二項演算 (積 と呼ぶ)

$$V \times V \rightarrow V, (a, b) \mapsto a \cdot b$$

は fix.

$(V, \cdot)$ は $\mathbb{R}$ 代数

$\xLeftrightarrow{\text{def}}$ " $\cdot$ " は 双線型

Ex 2.1.3 $\mathbb{R}$ は 通常の 積 について $\mathbb{R}$ 代数

この講義では以下の形のベクトル空間が主に現れる。

S を集合, W を実ベクトル空間とする。

S から W への写像 (W 値関数) 全体の集合を

$$W^S := \{ f : S \rightarrow W \} \quad \text{と書く.}$$

Prop 2.1.4 : W^S は以下の 関数の和, 関数のスカラー倍 により
実ベクトル空間) となる:

和 : 各 $f, g \in W^S$ について $f+g : S \rightarrow W, x \mapsto f(x) + g(x)$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 W^S の和 W の和

スカラー倍 : 各 $f \in W^S, \lambda \in \mathbb{R}$ について $\lambda \cdot f : S \rightarrow W, x \mapsto \lambda \cdot f(x)$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 W^S のスカラー倍 W のスカラー倍

(★) 関数の和, 関数のスカラー倍の定義についての注意

重要!
「何 x が「入力」で何 y が「出力」 y ?」を意識する。

	入力	出力
S 上の W 値関数	S の元	W の元
関数の和	2つの S 上の W 値関数	<u>S 上の W 値関数</u>
関数のスカラー倍	S 上の W 値関数 と $\mathbb{R}$ の元	<u>S 上の W 値関数</u>

この関係が「入力」と「出力」を
持っている

Remark @ $S = \emptyset$ のときは $R^S = \{0\}$ と考えていい.

@ W^S は “ W の S 回直積” と呼ぶことができる
が、ここでは深入りしない

@ W が有限次元, S が有限集合のとき

$$\dim W^S = \dim W \times \#S$$

(この講義では

$\dim W, S$ の有限性は仮定しない.

$\mathbb{R}$ 代数の重要例 2.1:

Ex 2.1.5 (関数の可代数)

S は集合とす。 S 上の実数値関数の可代数空間

$$\mathbb{R}^S := \{ f: S \rightarrow \mathbb{R} \}$$

は以下の“各点ごとの積”について $\mathbb{R}$ 代数となる。

積: 各 $f, g \in \mathbb{R}^S$ について

$$f \cdot g: S \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

$\downarrow$ $\mathbb{R}^S$ の積 $\downarrow$ $\mathbb{R}$ の積

もう一つ重要な例を紹介する。

以下はその例備：

Prop 2.1.6 : V, W を実ベクトル空間とする。

このとき 線型写像の集合

$$\mathcal{L}(V, W) := \{ \varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ は線型} \}$$

は W^V (Prop 2.4 の意味で実ベクトル空間とみなす)
の 線型部分空間

$\mathbb{R}$ 代数の重要例 2.2:

Ex 2.1.7 (線型作用素の可換 $\mathbb{R}$ 代数)

V は有限次元空間とする。

$\text{End}(V) := \mathcal{L}(V, V)$ とおく。

$\text{End}(V)$ の元 $T \in V$ 上の線型作用素と呼ぶ。

$\text{End}(V)$ は加法の合成について $\mathbb{R}$ 代数となる。

Section 2.1 終

Section 2.2: 部分 R 代数, R 代数準同型

Def 2.2.1 (部分 R 代数)

$(V, \cdot) \in R$ 代数, $W \subseteq V$ の線型部分空間
とす.

$W \subseteq V$ (部分 R 代数)

$\xleftrightarrow{\text{def}}$ W は " $\cdot$ " について閉じる.

(i.e. $\forall a, b \in W, a \cdot b \in W$)

Prop 2.2.2: 部分 R 代数は R 代数

Ex 2.2.3: $S \in \text{位相空間}$ とする.

$$C(S) := \{ f: S \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ は連続} \} \\ \subset \mathbb{R}^S$$

は $\mathbb{R}^S$ (Ex 2.5 の意味で $\mathbb{R}$ 代数) の
部分 $\mathbb{R}$ 代数.

特に $C(S)$ は $\mathbb{R}$ 代数.

Prop 2.2.4:

$(V, \cdot) \in \mathcal{R}\text{-代数}$ とし,

$\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in V$ の部分 $\mathcal{R}\text{-代数}$ の族とす。

このとき $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ は V の部分 $\mathcal{R}\text{-代数}$

Ex 2.2.5 S は位相空間とす。

各 $f \in \mathbb{R}^S$ について

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in S \mid f(x) \neq 0\}}$$

← S における
閉包

$\subset S$ とす。

このとき $\{f \in \mathbb{R}^S \mid \text{supp } f \text{ は compact}\}$ は

$\mathbb{R}^S$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

特に $C_c(S) := C(S) \cap \{f \in \mathbb{R}^S \mid \text{supp } f \text{ は compact}\}$

は $\mathbb{R}^S$ の (すなわち $C(S)$ の) 部分 $\mathbb{R}$ 代数

Def 2.2.6 (R代數準同型)

$(V, \cdot_V), (W, \cdot_W) \in \{ \text{R代數} \}$.

線型寫像 $\varphi: V \rightarrow W$ 為 R代數準同型

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \text{def} \end{array} & \forall a, b \in V, & \varphi(a \cdot_V b) = \varphi(a) \cdot_W \varphi(b) \\ & & \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ V \text{ 中 } a \text{ 積} & & W \text{ 中 } a \text{ 積} \end{array} \end{array}$$

Ex. 2.2.7: S , 集合, $p \in S$ 点.

$$\text{ev}_p : \underset{\substack{\mathcal{P} \\ \text{Ex 2.1.5}}}{\mathbb{R}^S} \rightarrow \underset{\substack{\mathcal{P} \\ \text{Ex 2.1.3}}}{\mathbb{R}}, f \mapsto f(p)$$

は $\mathbb{R}$ 代数 準同型

Ex 2.2.8 S_1, S_2 は位相空間

$\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ は連続写像 とす。

このとき φ に対応する

$$\varphi^* : C(S_2) \rightarrow C(S_1), \quad f \mapsto f \circ \varphi$$

は $\mathbb{R}$ 代数準同型。

Section 2.2 終

Section 2.3: $\mathbb{R}$ 代數の各種性質

$(V, \cdot)$: $\mathbb{R}$ 代數 $\Leftrightarrow$ 可也.

Def 2.3.1

① $(V, \cdot)$ が結合的 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
 $(\forall a, b, c \in V)$

② $(V, \cdot)$ が単位的 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 単位元 e が存在
 $\left(\begin{array}{l} "a \cdot 1_V = 1_V \cdot a = a \text{ } (\forall a \in V)" \\ \text{と可也 } 1_V \in V \text{ なる } a \text{ 存在} \end{array} \right)$

③ $(V, \cdot)$ が可換 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \cdot b = b \cdot a \text{ } (\forall a, b \in V)$

Prop 2.3.2 : 結合性, 可換性 は 部分 R 代数 に 遺伝 可也.

└ “単位的である” という性質 “は 遺伝 可也” とは
限らない..

Ex 2.3.3 : $S \in \text{位相空間}$ と可也.

R^S は 結合的, 可換, 単位的

$\cup$ $\downarrow$ $\Downarrow$
 $C(S)$ は 結合的, 可換, 単位的

$\cup$ $\downarrow$ $\Downarrow$
 $C_c(S)$ は 結合的, 可換,

$C_c(S)$ が 単位的 $\Leftrightarrow S$ が compact

Ex 2.3.4

$\text{End}(V)$ (Ex 2.1.7 の意味で R 代数) は
結合的 かつ 単位的.

可換 $\Leftrightarrow \dim V \leq 1$.

Ex 2.3.5: $(V, \cdot)$ は結合的 $\mathbb{R}$ 代数 と可也.

V 上 の 二項演算 $[,]$ (bracket積) を

$$[a, b] := a \cdot b - b \cdot a \quad (a, b \in V)$$

と定める.

このとき $(V, [,])$ は $\mathbb{R}$ 代数.

この $(V, [,])$ は 一般には

結合的でも単位的でも可換でもない.

(Lie 代数 と呼ばれるものに可也)

Section 2.3 終