

## Section 4 : 方向微分

意義 : " $C^\infty$  級関数のとり  $\mathbb{R}$  代数" の言葉を用いて  
方向微分を代数的に特徴付けよう.

### Part I : 多変数の微分論の代数化

#### Section 2 $\mathbb{R}$ 代数

3  $C^\infty$  級関数

4 方向微分 ✱

5 写像の微分

6 合成写像の微分

## 内容

① 市同微分の定義, 各種性質

② 接ベクトルの定義, 局所性

③ 市同微分 = 接ベクトル  $\xrightarrow{\text{試験範囲外}}$   
代数的に定義した。

↑  
"③"の証明は試験範囲外

## Section 4.1 : 方向微分の定義, 性質

設定 :  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$   
 $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$  : 開集合

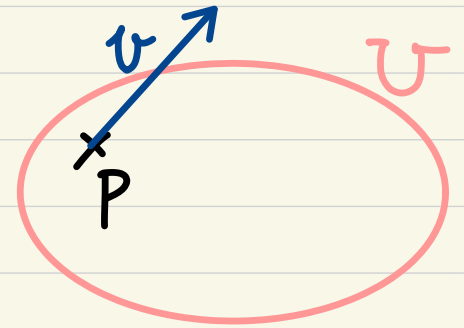
$\left\{ \begin{array}{l} n=0 \text{ のときは} \\ \text{おとり意図が} \\ \text{ない.} \\ n \geq 1 \text{ は想定して} \\ \text{いい} \end{array} \right.$

記号 :  $\{e_1, \dots, e_n\} : \mathbb{R}^n$  の標準基底

$C^\infty(U)$  :  $U$  上  $\mathbb{R}$  値  $C^\infty$  級関数全体  $\sim U$  上  $\mathbb{R}$  代数  
( cf. Section 2.3 )

方向微分の定義を復習す。

Def 4.1.1: <sup>点</sup>  $p \in U$ , <sup>ベクトル</sup>  $v \in \mathbb{R}^n$  とす。



若  $f \in C^\infty(U)$  ならば

$$v_p(f) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h} \in \mathbb{R}$$

と定める。

(  $p$  に対する  $f$  の  $v$  方向微分 )

Prop 4.1.2: Def 4.1.1 の設定で  $v_p(f) \in \mathbb{R}$  は well-defined

すなわち  $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  ( $a_i \in \mathbb{R}$ ) とおくと

(  $U \subset \mathbb{R}^n$ : open )  
が重要

$$v_p(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad \text{と} \quad \text{一致する。}$$

( C' 版で ok ; 3.7 まで自明で済むので各自解析を復習してほしい )

$p \in U$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$  と固定する.

写像  $v_p : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \mapsto v_p(f)$

について考える.

Prop 4.1.3:

$v_p : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  は線型写像

Hint:  $f, g \in C^\infty(U)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  と任意にとる.

(示)  $v_p(f+g) = v_p(f) + v_p(g)$  ←  $C^\infty(U)$  の和 ←  $\mathbb{R}$  の和

$v_p(\lambda f) = \lambda v_p(f)$  ←  $\mathbb{R}$  の積

←  $C^\infty(U)$  のスカラー-倍

Prop 4.1.4

$\forall f, g \in C^\infty(U),$

( $p$  におけるライプニッツ則)

$$\nu_p(f \cdot g) = \underbrace{\nu_p(f)}_{\substack{\uparrow \\ C^\infty(U) \text{ の積}}} \cdot \underbrace{g(p)}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R} \text{ の積}}} + \underbrace{f(p)}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R} \text{ の元}}} \cdot \underbrace{\nu_p(g)}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R} \text{ の積}}}$$

Section 4.2 以降 では, " $p$  におけるライプニッツ則" を用いて  
 $p$  での微分/積を特徴付けよう.

後々のために以下の記号を準備しておく

Def. 4.1.5 : 各  $i=1, \dots, n$ , 各  $p \in U$  に対して

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \right]$$

Prop 4.1.6 : 各  $i=1, \dots, n$ , 各  $p \in U$  に対して

$$\left[ \begin{array}{l} \rightarrow (e_i)_p = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p. \end{array} \right]$$

$\{e_1, \dots, e_n\}$   
は  $\mathbb{R}^n$  の標準基底

Section 4.1 終

## Section 4.2 : 接ベクトルの定義

設定 :  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$  : open

$p \in U$

← 点  $p$  も固定

記号 :  $C^\infty(U)$  :  $U$  上  $\mathbb{R}$  値  $C^\infty$  級関数全体の  
可換  $\mathbb{R}$  代数 (cf. Section 2.3)

$\mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R}) := \{ \eta : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R} \mid \eta \text{ は線型} \}$

↑ Prop 2.1.6 の意味でベクトル空間

$\mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R})$  の元  $\eta$  は  $C^\infty(U)$  上の (線型) 汎関数 と呼ば  
(ファンクション)



Def 4.2.1 : 線型汎関数  $\gamma : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  である

$p \in U$  においてライプニッツの則を満足する

$\hookrightarrow$   $\forall f, g \in C^\infty(U),$

$$\gamma(f \cdot g) = \underbrace{\gamma(f)}_{\substack{\uparrow \\ C^\infty(U) \text{ の積}}} \cdot \underbrace{g(p)}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R} \text{ の積}}} + \underbrace{f(p)}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R} \text{ の積}}} \cdot \underbrace{\gamma(g)}_{\substack{\uparrow \\ C^\infty(U) \text{ の積}}}$$

Red arrows indicate the Leibniz rule structure:  $\gamma(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \gamma(g)$ .  
Green arrows indicate the multiplication structure:  $\gamma(f)$  and  $\gamma(g)$  are elements of  $C^\infty(U)$  (積), while  $g(p)$  and  $f(p)$  are elements of  $\mathbb{R}$  (積).

以下の様に記号を定める:

$$J: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}; \text{線型}$$

Def. 4.2.2:  $T_p U := \{ J \in \mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R})$

$U$  の  $p$  における  
接空間

$\left. \begin{array}{l} J \text{ は } p \text{ における} \\ \text{ライプニッツ則} \\ \text{を満たす} \end{array} \right\}$

$T_p U$  の元を  $U$  の  $p$  における 接ベクトル とする.  
(tangent vector)

後で '方向微分' = 接ベクトル, と示す.

Prop 4.2.3 : 各  $v \in \mathbb{R}^n$  について  $\underline{v_p} \in T_p U$

(cf. Prop 4.1.3 and 4.1.4)  $p$  における  $v$  の何微分

Question : 何微分以外にも  $T_p U$  の元はあるか?

Answer : 実は存在 (はい!)

(i.e.  $T_p U = \{ v_p \mid v \in \mathbb{R}^n \}$ )

何微分は “線型性” と “ライプニッツ則”  
で代数的に特徴付けられる!

(  $C^a(U)$  に属してあれば,  
 $U$  の任意の点で  $\mathbb{R}^n$  と見做してもいい )

Section  
4.2 終

## Section 4.3: 方向微分と接ベクトル

この節の目標

「方向微分 = 接ベクトル」を定式化  
(証明は Section 4.4 と 4.5)

少し準備:

Prop 4.3.1 :  $T_p U$  は  $\mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R})$  の線型部分空間.

特: ベクトル空間と  $\mathbb{R}$ 。

和 :  $\gamma_1 + \gamma_2 : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \gamma_1(f) + \gamma_2(f)$  ( $\gamma_1, \gamma_2 \in T_p U$ )  
 $\uparrow$  関数  $\alpha$  和  $\uparrow$   $\mathbb{R}$  の和

スカラー倍:  $\lambda \gamma : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \lambda \cdot \gamma(f)$  ( $\gamma \in T_p U, \lambda \in \mathbb{R}$ )  
 $\uparrow$  関数  $\alpha$  スカラー倍  $\uparrow$   $\mathbb{R}$  の積

Def. 4.3.2 :  $\bar{\Psi}_{p,U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U, v \mapsto v_p \in T'_p$ .  
( Prop 4.2.3 により well-defined )

Prop 4.3.3 :  $\bar{\Psi}_{p,U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U$  は線型写像 である。

Hint : (示) :  $\bar{\Psi}_{p,U}$  は和とスカラー倍を保つ

i.e. ①  $\forall v, w \in \mathbb{R}^n, (v+w)_p = v_p + w_p$  as  $C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$

②  $\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda v)_p = \lambda v_p$   
as  $C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$

① の証明 :  $v, w \in \mathbb{R}^n$  を任意にとる。

$$(示) (v+w)_p = v_p + w_p$$

i.e.  $\forall f \in C^\infty(U), (v+w)_p f = (v_p + w_p) f$

.... ( Prop 4.1.2 を用いる )

Prop 4.3.4 :  $\bar{\Psi}_{p,U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U$  は単射

Proof: Prop 4.3.3 により  $\mathbb{C}_{p,u}$  は 離散型写像  $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{Z}$

以下 3 点也 10 十分

⑦  $\forall v \in \mathbb{R}^n$  with  $v_p = 0$ ,  $v = 0$ .

$v_p = 0$  且  $\forall v \in \mathbb{R}^n$  任意  $v$  且  $v \neq 0$ .

$$V = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad (a_i \in \mathbb{R}) \quad \text{と} \quad \alpha' < \cdot \quad (\text{Recall: } \{e_1, \dots, e_n\} \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の標準基底})$$

④  $\forall i = 1, \dots, n, Q_i = 0.$

$$i=1, \dots, n \in \text{任意 } i \in \mathbb{N}.$$

フグ

$\pi_i : U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_i$  とおくと,

$\pi_i \in C^\infty(U)$  (多項式関数) かつ  $V_p(\pi_i) = Q_i$   
(by Prop 4.1.2).

∴  $V_p = 0$  ならば  $Q_i = V_p(\pi_i) = 0$ .



「ベクトル空間」の定式化

Theorem 4.3.5 :

$\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U$  は線型同型

特に「全射性」が重要（それ以外は可逆に逆写像）

Section 4.4 & 4.5 で証明の要点を紹介する。

定理の意義 :

$T_p U$  を「 $p$  を始点とするベクトル全体」と思えばいい。

とくに  $T_p U$  は  $C^\infty(U)$  の言葉で定義されている

ので「 $p$  を始点とするベクトル全体」は

$\mathbb{R}$  代数  $C^\infty(U)$  から復元できる。



Cor 4.3.6 :  $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p$  は  $T_p U$  の基底  
L  
(cf. Def. 4.1.5, Prop 4.1.6)

Section 4.3 終

## Section 4.4 : 接ベクトルの局所性

試験範囲外

この節では接ベクトルを“局所的”な概念であることを示す。

(Theorem 4.3.5 の証明の準備)

設定 :  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$  : 空でない開集合

$p \in U$

記号 :  $C_p^\infty(U) = \{ [f]_p \mid f \in C^\infty(U) \}$

( cf. Section 3.4 )

Prop 4.4.1: 各  $\gamma \in T_p U$  は

(接ベクトルの局所性)  $\tilde{\gamma} : C_p^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}, [f]_p \mapsto \gamma f$

は誘導well (i.e.  $f \sim_p g \Rightarrow \gamma(f) = \gamma(g) (\forall f, g \in C^\infty(U))$ ).

Proof:  $\gamma \in T_p U, f, g \in C^\infty(U)$  with  $f \sim_p g$  を任意にとる.

$\gamma$  は線型  $\gamma$  の  $\gamma$  以下  $\gamma$  であるから

$$\textcircled{\text{示}} \gamma(f - g) = 0.$$

いま  $f \sim_p g$  より  $p$  の開近傍  $U_0$  in  $U$  がある

$f|_{U_0} = g|_{U_0}$  であるから  $\gamma$  である。

この  $U_0$  について  $\mathcal{U}_r(p) \subset U_0$  である  $r > 0$  を fix.  
 $p$  の  $r$ -開近傍

7.2.2

$r_1 = \frac{1}{2}r, r_2 = r$  と (7.2.6) a  $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  と  $1 \geq b \geq 0$ .

$$7.2.2) \quad \begin{cases} \|x - p\| < \frac{1}{2}r \Rightarrow b(x) = 1 \\ \|x - p\| \geq r \Rightarrow b(x) = 0 \end{cases} \quad \text{? 満7.2.7 } b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

と  $1 \geq b \geq 0$  と  $b|_U \in C^\infty(U)$  と  $b|_U \leq 1$ .

$$7.2.2) \quad b_U \cdot (f - g) = 0_U \quad \text{に注意すると}$$

$\uparrow$   $U$  上のゼロ関数

$$\begin{aligned} 0 &= g(0_U) = g(b_U \cdot (f - g)) \\ &= g(b_U) \cdot \underbrace{(f - g)(p)}_0 + \underbrace{(b_U)(p)}_1 g(f - g) \\ &= g(f - g) \end{aligned}$$



Prop 4.4.2 :  $\tilde{ev}_p : C_p^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}, [f]_p \mapsto f(p)$   
 は well-defined 2,  $\mathbb{R}$  代数準同型.

Def. 4.4.3 :

$$T_p^{\text{stark}} U := \left\{ \underbrace{\zeta \in \mathcal{L}(C_p^\infty(U), \mathbb{R})}_{\substack{C_p^\infty(U) \text{ 上 の 関数} \\ \text{の 1 次 部分空間}}} \mid \underbrace{\zeta(\alpha \cdot \beta)}_{\substack{\text{"} C_p^\infty(U) \text{ 上 の 閉 性 "}}} = \zeta(\alpha) \cdot \tilde{ev}_p(\beta) + \tilde{ev}_p(\alpha) \cdot \zeta(\beta) \right\} \\
(\forall \alpha, \beta \in C_p^\infty(U))$$

Prop 4.4.4 :  $T_p^{\text{stark}}(U)$  は  $\mathcal{L}(C_p^\infty(U), \mathbb{R})$   
 の 線型 部分空間

次の定理を次節で用いる。

Theorem 4.4.5 :

$$\left[ \begin{array}{l} T_P U \rightarrow T_P^{\text{stark}} U, \gamma \mapsto \tilde{\gamma} \\ \text{は well-defined で 線型同型写像} \end{array} \right.$$

(証明は難しくはない)

$T_P^{\text{stark}} U$  は  $T_P U$  から “定義の  $\gamma$  を  $\tilde{\gamma}$  とした” もの。

$T_P^{\text{stark}} U$  を “接空間” と定義する流儀もある。

Section 4.4 終

## Section 4.5 · Theorem 4.3.5 の証明

試験範囲外

Theorem 4.3.5 (再掲)  $p \in U \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^n$  とする。

└  $\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U$  は線型同型

全射性以外は Section 4.3 で扱った。

全射性の証明の流れ：

Step 1 :  $U$  のとり換えについて

Step 2 :  $U$  が凸の場合の証明

Step 3 : 一般の場合の証明

Step 1 :  $U$  の  $\varepsilon$  へ替えについて

Step 1 の  $\varepsilon$ - $U$  は次の問題

Lemma 4.5.1 :  $p \in U' \subset U \subset \mathbb{R}^n$  :  $p$  の開近傍と可也.

次の2条件は同値

(i)  $\mathbb{T}_{p,U'} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U'$  は線型同型

$\Updownarrow$

(ii)  $\mathbb{T}_{p,U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U$  は線型同型

つまり Thm 4.3.5 は 必要ならば「 $U \ni x \in I \subset \varepsilon$  へ替え」

示せば 1/2



Thm 4.5.1 の証明に同じ準備:

$p \in U' \subset U \subset \mathbb{R}^n$ :  $p$  の開近傍と可.

Prop 4.5.2

$$\tilde{J} : T_p U' \rightarrow T_p U, \quad j \mapsto j \cdot \text{res}_{U'}^U,$$

is well-defined 2" 線型写像

$$C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U')$$

制限写像

(cf. Section 3.4)

Theorem 4.5.3:  $\bar{\zeta} : T_p U' \rightarrow T_p U$  は 線型同型写像

(Hint: Thm 3.4.9 and Thm 4.4.5)

↑  
このために  $\bar{\zeta}$  を準備して

Prop 4.5.4: 次の図式は可換 (i.e.  $\bar{\zeta}_{p,U} = \bar{\zeta} \circ \bar{\zeta}_{p,U'}$ )

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\bar{\zeta}_{p,U'}} & T_p U' \\ & \searrow \bar{\zeta}_{p,U} & \downarrow \bar{\zeta} \\ & & T_p U \end{array}$$

Proof of Lemma 4.5.1 Thm 4.5.3 と Prop 4.5.4 を使う。同

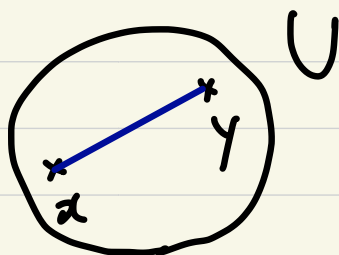
## Step 2 : $U$ が凸の場合の証明

Step 2 の  $T$ - $U$  の次の定理

Prop 4.5.5 :  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  :  $p$  の凸開近傍と可.

このとき  $\exists \Psi_{p,U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U$  は全射

Recall :  $U \subset \mathbb{R}^n$  が凸  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1],$   
 $tx + (1-t)y \in U$



Prop 4.5.5 の証明のため, 2つの補題を準備する.

Lemma 4.5.6  $p \in U \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^n$  とする ( $U$  は凸で  $U \subset \mathbb{R}^n$  もよい)

$1_U : U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$  (定数関数) とおく.

このとき  $1_U \in C^\infty(U)$  かつ  $\forall \eta \in T_p U, \eta(1_U) = 0$ .

Proof :  $1_U$  は定数関数だから  $1_U \in C^\infty(U)$ .

$\eta \in T_p U$  を任意にとる.

①  $\eta(1_U) = 0$ .

$1_U \cdot 1_U = 1_U$  に注意すると,

$$\eta(1_U) = \eta(1_U \cdot 1_U) = \eta(1_U) \cdot 1 + 1 \cdot \eta(1_U) = 2\eta(1_U).$$

😞 ライプニッツ則

これから  $\eta(1_U) = 0$  □

Lemma 4.5.7 :  $p \in U \subset \mathbb{R}^n$  :  $U$  is open.

$f \in C^\infty(U)$  is fixed.

Let  $G_1^f, \dots, G_n^f \in C^\infty(U)$  be

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n G_i^f(x) (x_i - p_i) \quad (\forall x \in U) \\ G_i^f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \quad (\forall i=1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

such things exist.

This problem is not simple to prove.

Integration is necessary (the proof of the fundamental theorem of calculus is introduced at the end of this slide)

## Proof of Prop 4.5.5

$$\forall \eta \in T_p(U) \quad \exists \varepsilon > 0.$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \exists \eta \quad \exists \varepsilon_i > 0 \quad \exists \delta_i < \varepsilon_i.$$

$$\exists \eta \quad \exists \varepsilon_i > 0 \quad \exists \delta_i < \varepsilon_i.$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad \bar{\Gamma}_{p,U} \left( \sum_{i=1}^n a_i e_i \right) = \eta$$

$$\text{i.e. } \forall f \in C^\infty(U), \quad \left( \sum_{i=1}^n a_i e_i \right)_p f = \eta(f)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

$\forall f \in C^\infty(U) \exists \varepsilon > 0.$

$$\textcircled{\text{II}} \quad \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \eta(f)$$

Lemma 4.5.7 (I)  $G_1^f, \dots, G_n^f \in C^\infty(U) \subset \mathcal{A}, \mathcal{I}$

$$\begin{cases} f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n G_i^f(x) (x_i - p_i) & (\forall x \in U) \\ G_i^f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) & (i = 1, \dots, n) \end{cases}$$

$\varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathcal{P}^+ \text{ s.t. } \varepsilon < \alpha$ .

特  $1_U: U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$  (定数関数)  $\in \mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ ,

$$f = \underbrace{f(p)}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ \uparrow \\ C^\infty(U)}} \cdot \underbrace{1_U}_{\substack{\in C^\infty(U) \\ \uparrow \\ C^\infty(U)}} + \sum_{i=1}^n \underbrace{G_i^f}_{\substack{\in C^\infty(U) \\ \uparrow \\ C^\infty(U)}} \cdot (\underbrace{x_i}_{\substack{\in C^\infty(U) \\ \uparrow \\ C^\infty(U)}} - \underbrace{p_i}_{\substack{\in \mathbb{R} \\ \uparrow \\ C^\infty(U)}} \cdot \underbrace{1_U}_{\substack{\in C^\infty(U) \\ \uparrow \\ C^\infty(U)}}) \quad (\text{in } C^\infty(U))$$

$\in \mathcal{A} \cap \mathcal{I}.$

従って

$$\eta(f) = \eta\left(f(p) \cdot 1_0 + \sum_{i=1}^n G_i^f \cdot (\pi_i - p_i \cdot 1_0)\right)$$

$$\stackrel{\eta \text{ の線型性}}{=} f(p) \cdot \underbrace{\eta(1_0)}_{=0} + \sum_{i=1}^n \eta\left(G_i^f \cdot (\pi_i - p_i \cdot 1_0)\right) \quad (\because \text{Lemma 4.5.6})$$

$$= \sum_{i=1}^n \eta\left(G_i^f \cdot (\pi_i - p_i \cdot 1_0)\right)$$

$$\stackrel{\text{ライプニッツ則} + \text{線型性}}{=} \sum_{i=1}^n \left( \eta(G_i^f) \cdot \underbrace{(\pi_i(p) - p_i \cdot 1_0(p))}_{= p_i - p_i = 0} + \underbrace{G_i^f(p)}_{= \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)} \cdot \underbrace{(\eta(\pi_i) - p_i \eta(1_0))}_{= Q_i - 0} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$





## Step 3 : 一般の場合の証明

### Proof of Thm 4.3.5

$p \in U \subset \mathbb{R}^n$  と可也.  
open

①  $\bar{\Psi}_{p,U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U$  は線型同型

$U$  は開集合 in  $\mathbb{R}^n$  と可也

$\mathcal{U}_r(p) \subset U$  と可也  $r > 0$  存在可也.

$p$  a  $r$  附近傍

ツツ

このように  $r > 0$  を fix し,

$p$  の凸近傍

$$U' := \mathcal{U}_r(p) \left( \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^n \right) \text{ である.}$$

Lemma 4.5.1 より 次を示せば OK

①  $\bar{\Psi}_{p,U'} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U'$  は 線型同型

「全射性」以外は Section 4.3 で扱った.

全射性のみ示せば OK.

②  $\bar{\Psi}_{p,U'} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U'$  は 全射

ここで  $U' := \mathcal{U}_r(p)$  は 凸 である, Prop 4.5.5 より

$\bar{\Psi}_{p,U'} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U'$  は 全射  $\square$

この証明を以下も分る。

Prop 4.5.7  $\Psi_{p,U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U$  の逆写像は

$$\Psi_{p,U}^{-1} : T_p U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto (y(x_1), \dots, y(x_n))$$

$$1 \leq i \leq n \quad x_i : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_i.$$

特に任意の  $y \in T_p U$  には

$$y = \sum_{i=1}^n y(x_i) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Section 4.5

終

## 補足プリント

**Lemma A.**  $U \subset \mathbb{R}^n$  を空でない凸な開集合とし,  $p \in U$  を固定する.  $U$  上の  $C^\infty$  級関数  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  を考える. このとき, ある  $U$  上の  $C^\infty$  級関数の組  $G_1^f, \dots, G_n^f: U \rightarrow \mathbb{R}$  であって, 以下の条件を満たすものが存在する.

- $f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n G_i^f(x)(x_i - p_i)$  for any  $x \in U$ .
- $G_i^f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ .

Lemma A の証明のアイディア. 各  $i$  について関数  $G_i^f: U \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$G_i^f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x - p)) dt$$

とする ( $U$  が凸であることから上記の関数が well-defined となる). このとき  $G_i^f: U \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^\infty$  級関数となる (これは非自明な事実である: 詳しくは次ページ以降を参照). 各  $x \in U$  について

$$h_x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(p + t(x - p))$$

とすれば

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &= h_x(1) - h_x(0) \\ &= \int_0^1 \frac{dh_x}{dt}(t) dt \quad (\because \text{微積分の基本定理}) \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(h_x(t))(x_i - p_i) dt \quad (\because \text{連鎖律}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x - p)) dt \right) \\ &= \sum_{i=1}^n G_i^f(x)(x_i - p_i) \end{aligned}$$

となるので一つ目の条件を満たす. また

$$G_i^f(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \left( \int_0^1 1 dt \right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

となるから二つ目の条件も満たす. □

$G_i^f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + tx) dt$  の微分可能性については次ページ以降を参照

証明の中で構成した  $G_i^f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tx)dt$  が  $C^\infty$  級であることは以下の一般的な定理から従う (確認せよ):

**Theorem B.** 开区間  $(a,b) \subset \mathbb{R}$  と  $\mathbb{R}^n$  の開集合  $U$  を固定し,  $C^1$  級関数  $K : (a,b) \times U \rightarrow \mathbb{R}$  を考える. また  $(a,b)$  に含まれる有界閉区間  $I$  も固定しておく. このとき

$$G : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{t \in I} K(t, x) dt$$

とすると,  $G : U \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^1$  級関数となる. また各  $t \in I$  について  $K^t : U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto K(t, x)$  とおけば, 各  $i = 1, \dots, n$  について

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \int_{t \in I} \frac{\partial K^t}{\partial x_i}(x) dt \quad \text{for any } x \in U$$

が成り立つ (つまり偏微分と積分の交換が可能である).

**Remark C.** 1. 今回考えている有界閉区間上の積分はリーマン積分と考えてもルベグ積分と考えても (有界閉区間をルベグ測度によって測度空間と見なしている) 同じである. 一般に  $\mathbb{R}$  上の連続関数の広義積分とルベグ積分は (可積分性からして) 異なる可能性があるが, 有界閉区間上の連続関数はリーマン可積分かつルベグ可積分でそれぞれの積分値も一致することが知られている.

2. 関数  $K$  の満たす条件としてはもっと緩和された状況で考えることも可能であるが, ここでは面倒な議論を避けるため大きな開集合上で  $C^1$  級であるという強い仮定を置いている.

**Theorem B** の証明のヒント:

$v \in \mathbb{R}^n$  を任意に選んで固定する. ルベグの優収束定理 (下に主張だけ書いておく) を用いると,  $U$  内の点  $x$  に収束する点列  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow 0} \int_{t \in I} \frac{K^t(x_n + sv) - K^t(x_n)}{s} dt = \int_{t \in I} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K^t(x_n + sv) - K^t(x_n)}{s} dt$$

が正当化できる. このとき左辺は  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{x_n}(G)$  で, 右辺は  $\int_{t \in I} v_x(K^t) dt$  である (ただし  $v_y$  は  $y$  における  $v$  での方向微分とする). 特に偏導関数  $v(G) : U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto v_x(G)$  は well-defined な連続関数で  $v_x(G) = \int_{t \in I} v_x(K^t) dt$  ( $x \in U$ ) となることが分かる.

**Theorem D** (ルベグの優収束定理).  $(I, m)$  を測度空間とし,  $I$  上の関数  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  と  $I$  上の可測関数の列  $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$  が以下の条件を満たしているとする:

- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $f$  に各点収束する.
- ある可積分関数  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  であって, 十分大きな  $n$  について  $|f_n(t)| \leq g(t)$  (for any  $t \in I$ ) となるものが存在する.

このとき  $f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $f$  はそれぞれ可積分で,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n dm = \int_I f dm.$$

Theorem B の証明. 各  $x \in U$  について  $K_x : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto K(t, x)$  とおけば,  $G(x) = \int_{t \in I} K_x(t) dt$  である. これが well-defined であることは  $K_x$  が有界閉区間  $I$  上の連続関数であり, 特にルベーグ可積分である (リーマン可積分でもある) ことから従う.

以降ベクトル  $v \in \mathbb{R}^n$  を任意に選んで固定する. 各  $x \in U$  について  $v_x$  を  $x$  における  $v$  での方向微分とする. このとき, 以下の事を示せばよい.

- 各  $x \in U$  について関数  $I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto v_x(K^t)$  が  $I$  上可積分.
- $\frac{G(x+sv)-G(x)}{s} \rightarrow \int_{t \in I} v_x(K^t) dt$  (as  $s \rightarrow 0$ ). 特に  $v_x(G) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(x+sv)-G(x)}{s}$  は well-defined.
- $v(G) : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto v_x(G)$  が連続.

各  $x \in U$  と  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  について

$$f_s^x : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{K(t, x+sv) - K(t, x)}{s}$$

とすれば,  $f_s^x$  は  $|s|$  が十分小さいとき well-defined である. いま  $K : (a, b) \times U \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^1$  級であったから

$$v(K) : (a, b) \times U \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto v_x(K^t)$$

は連続である. 特に各  $x$  の  $U$  内のコンパクト近傍  $V_x$  を固定すると,  $v(K)$  は  $I \times V_x$  上有界であり,

$$M_x := \sup_{(t, y) \in I \times V_x} |v_y(K^t)| < \infty$$

とおける. このとき各  $x \in U$  に対して,  $|s|$  が十分小さい状況では  $x+sv \in V_x$  であり,

$$\begin{aligned} |f_s^x(t)| &= \left| \frac{K(t, x+sv) - K(t, x)}{s} \right| \\ &\leq \sup_{y \in V_x} |v_y(K^t)| \quad (\because \text{平均値の定理}) \\ &\leq M_x \quad (\text{for any } t \in I) \end{aligned}$$

となる.

以下  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  内の数列  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  で  $s_n \rightarrow 0$  (as  $n \rightarrow \infty$ ) となるものを任意に固定する. このとき関数列  $\{f_{s_n}^x\}_{n \in \mathbb{N}}$  は

$$f^x : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto v_x(K^t)$$

に各点収束し,  $n$  が十分大きいとき

$$|f_{s_n}^x(t)| \leq M_x \quad \text{for any } t \in I$$

である. 従ってルベーグの優収束定理より  $f_{s_n}^x(t) = \frac{K(t, x+s_nv) - K(t, x)}{s_n}$ ,  $f^x(t) = v_x(K^t)$  は  $I$  上可積分で,

$$\begin{aligned} \int_{t \in I} v_x(K^t) dt &= \int_{t \in I} f^x(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t \in I} f_{s_n}^x(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t \in I} \frac{K(t, x+s_nv) - K(t, x)}{s_n} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(x+s_nv) - G(x)}{s_n} \end{aligned}$$

を得る. 特に 0 に収束する  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  内の数列  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  としては任意のものを考えてたので, 各  $x \in U$  について  $v_x(G) := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(x+sv) - G(x)}{s}$  は well-defined で  $v_x(G) = \int_{t \in I} v_x(K^t) dt$  となる.

最後に  $v(G) : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto v_x(G) = \int_{t \in I} v_x(K^t) dt$  が連続であることを示そう.  $U$  内の収束点列  $x_n \rightarrow x$  (as  $n \rightarrow \infty$ ) について,  $v_{x_n}(G) \rightarrow v_x(G)$  (as  $n \rightarrow \infty$ ) となることを示せばよい. いま  $K : (a, b) \times U \rightarrow \mathbb{R}$  は  $C^1$  級であるから,  $v(K) : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto v_x(K^t)$  は連続であったことを思い出すと, 連続関数  $F_n = f^{x_n} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto v_{x_n}(K^t)$  は  $F = f^x : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto v_x(K^t)$  に各点収束する.  $n$  が十分大きいとき  $x_n \in V_x$  であり, このとき

$$|F_n(t)| = |v_{x_n}(K^t)| \leq \sup_{y \in V_x} |v_y(K^t)| \leq M_x \text{ for any } t \in I$$

を得る. 従って再度ルベークの優収束定理を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} v_{x_n}(G) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t \in I} v_{x_n}(K^t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t \in I} F_n(t) dt \\ &= \int_{t \in I} F(t) dt \\ &= \int_{t \in I} v_x(K^t) dt \\ &= v_x(G). \end{aligned}$$

□