Section 6 : 合成写像の微分

意義：C^∞級写像の合成，その全微分を調べる．
応用として全微分の幾何的解釈を与える．

Part I : 多変数の微分論の代数化

Section 2 $\mathbb{R}$代数
3 C^∞級関数
4 方向微分
5 写像の微分
6 合成写像の微分 ①

内容

- C^∞級写像の合成
- 合成写像の微分
- 曲線の速度ベクトルの定義
- 全微分の幾何学的解釈

Section 6.1 C^∞級写像の合成とその微分

目標 ① 「C^∞級写像の合成はC^∞級写像」

② 「合成の全微分は全微分の合成」

設定 $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

各 $i = 1, 2, 3$ について $U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i}$

$\varphi : U_1 \to U_2$:

$\psi : U_2 \to U_3$:

C^∞級

目標①について

Theorem 6.1.1 · 合成写像

$\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$ は C^∞級

図式：

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \varphi"'] & U_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & U_3 \\ & & \end{tikzcd}$$

以下，証明を紹介する．

少し準備

Lemma 6.1.2

$$(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$$

as $C(U_3) \to C(U_1)$

図式：

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\varphi"] & U_2 \arrow[r, "\psi"] & U_3 \arrow[d, "f"] \\
(\psi\circ\varphi)^*(f) \arrow[r, phantom, "\ni"] & \psi^*(f) \arrow[r, phantom, "\ni"] & \mathbb{R} \\
\varphi^*(\psi^*(f)) \arrow[u, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}$$

Proof of Theorem 6.1.1

示 $(\psi \circ \varphi)^*(C^\infty(U_3)) \subset C^\infty(U_1)$

i.e. $\forall f \in C^\infty(U_3)$, $(\psi \circ \varphi)^*(f) \in C^\infty(U_1)$

$f \in C^\infty(U_3)$ を任意にとる.

示 $(\psi \circ \varphi)^*(f) \in C^\infty(U_1)$

ここで Lemma 6.1.2 より

$$(\psi \circ \varphi)^*(f) = (\varphi^* \circ \psi^*)(f)$$
$$= \varphi^*(\psi^*(f)).$$

つづき

示 $\varphi^*(\psi^*(f)) \in C^\infty(U_1)$.

いま ψ は C^∞ 級なので $\psi^*(f) \in C^\infty(U_2)$

φ も C^∞ 級なので $\varphi^*(\psi^*(f)) \in C^\infty(U_1)$

$\blacksquare$

目標②について

Recall : $\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$ は C^∞ 級 (cf. Thm 6.1.1)

Theorem 6.1.3 (合成写像の全微分)

$p \in U_1$ を fix. このとき

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p : T_p U_1 \to T_{(\psi \circ \varphi)(p)} U_3$$

図式 :

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\varphi"] & U_2 \arrow[r, "\psi"] & U_3 \\ T_p U_1 \arrow[r, "(d\varphi)_p"] & T_{\varphi(p)} U_2 \arrow[r, "(d\psi)_{\varphi(p)}"] & T_{(\psi \circ \varphi)(p)} U_3 \end{tikzcd}$$

Proof of Theorem 6.1.3

(ii) $(d(\psi\circ\varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p$

as $T_pU_1 \to T_{(\psi\circ\varphi)(p)}U_3$

i.e. $\forall y \in T_pU_1$,

$$(d(\psi\circ\varphi))_p(y) = ((d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p)(y)$$

as in $T_{(\psi\circ\varphi)(p)}U_3$

$y \in T_pU_1$ を任意にとる.

示 $(d(\psi\circ\varphi))_p(y) = ((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p)(y)$

$$(\text{左辺}) = y\circ(\psi\circ\varphi)^*$$

$$= y\circ\varphi^*\circ\psi^* \quad (\because \text{Lemma } 6.1.2)$$

$$= \underbrace{((d\varphi)_p(y))}_{\in T_{\varphi(p)}U_2}\circ\psi^*$$

$$= (d\psi)_{\varphi(p)}((d\varphi)_p(y))$$

$$= ((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p)(y) = (\text{右辺})$$

$\blacksquare$

Cor 6.1.4 (cf. Thms 5.3.2 and 5.1.3)

$$\underbrace{(J(\psi\circ\varphi))_p}_{n_3\times n_1} = \underbrace{(J\psi)_{\varphi(p)}}_{n_3\times n_2} \cdot \underbrace{(J\varphi)_p}_{n_2\times n_1}$$

行列の積

(実はこれは連鎖律)

Section 6.1 終

Section 6.2 : 曲線の速度ベクトル

この節では 曲線の速度ベクトルの定義を行う
(Section 6.3 の準備)

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$: 開集合

$(a, b) \subset \mathbb{R}$: 開区間

$(-\infty \leq a < b \leq \infty)$

Def. 6.2.1: C^∞級写像 $c : (a,b) \to U$ のことを U 上の C^∞級曲線と呼ぶ

Def. 6.2.2: U 上の C^∞級曲線 $c : (a,b) \to U$, $t_0 \in (a,b)$ について

写像 $\dot{c}(t_0) : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ c)(t_0+h) - (f \circ c)(t_0)}{h} = (f \circ c)'(t_0)$$

を c の t_0 における速度ベクトルと呼ぶ

記号：$U \subset \mathbb{R}^n$ における

偏微分は $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ の記号を用い，

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ における

微分は $\frac{d}{dt}$ の記号を用いる．

Prop 6.2.3：$c : (a,b) \to U$ ：U 上の C^∞ 級曲線

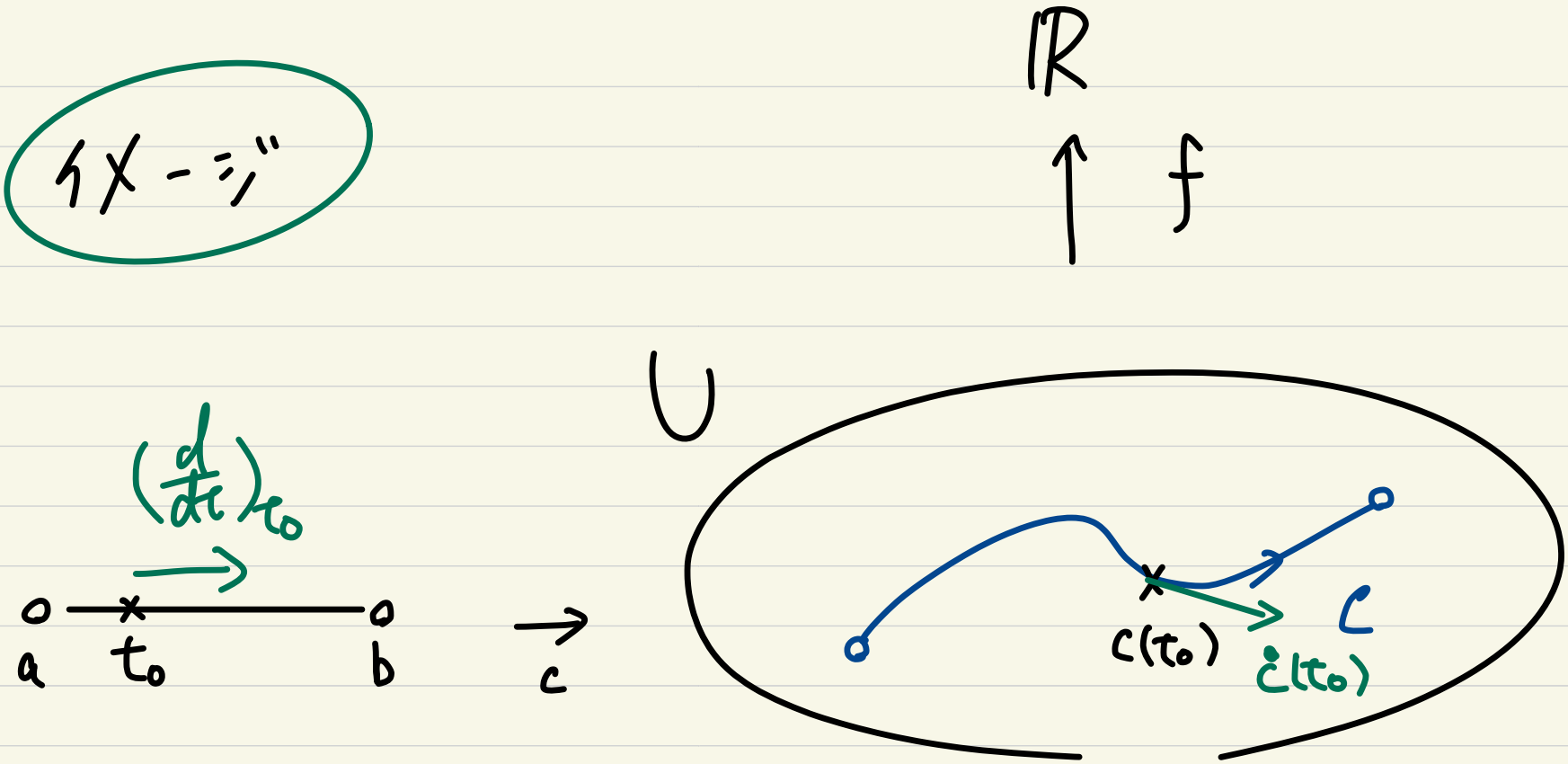
$t_0 \in (a,b)$ について，

$$\dot{c}(t_0) = \underbrace{(dc)_{t_0}}_{c\text{ の全微分}}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{t_0}\right) \in T_{c(t_0)}U$$

速度ベクトルは接ベクトル

（定義そのもの）

イメージ



$(\dot{c}(t_0))(f)$ は時刻 t_0 において，

f の c に沿った変化率を見ている．

速度ベクトルの計算法

Prop 6.2.4 :

$c : (a,b) \to U \subset \mathbb{R}^n,\ t \mapsto (c_1(t), \cdots, c_n(t))$

: U 上の C^∞ 級曲線

$t_0 \in (a,b)$ とする.

(Prop 5.1.3 より $c_1, \cdots, c_n \in C^\infty((a,b))$)

このとき

$$\dot{c}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(t_0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{c(t_0)} .$$

どんな接ベクトルもある曲線の速度ベクトルで書ける.

Prop 6.2.5:

$p \in U$, $y \in T_pU$ とする.

このとき

$\exists \varepsilon > 0$, $\exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$: U 上の C^∞ 級曲線

s.t.

$c(0) = p$ かつ $\dot{c}(0) = y$

Hint: $y = \sum_{i=1}^{n} y(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ (Cor 4.5.7 または Lemma 5.3.4)

Section 6.2 終

Section 6.3：全微分の幾何学的解釈

この節では"曲線の対応"を通じて
写像の微分を特徴付ける.

設定：$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i} \quad (i=1,2)$

$\varphi : U_1 \to U_2$ ： C^∞ 級写像

$p \in U_1$

記号：$(d\varphi)_p : T_p U_1 \to T_{\varphi(p)} U_2, \ y \mapsto y \circ \varphi^*$

φ の p における全微分

曲線の対応

Prop 6.3.1: $(a,b) \subset \mathbb{R}$: 空でない開区間.

$c : (a,b) \to U_1$: U_1 上の C^∞ 級曲線とする.

このとき $\varphi \circ c : (a,b) \to U_2$ は U_2 上の C^∞ 級曲線

Hint: Thm 6.1.1

記号：

$$\mathrm{Curve}(U_1;p) := \left\{ \begin{array}{l} U_1 \text{ 上の } C^\infty \text{級曲線} \\ c : (a,b) \to U_1 \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} a<0<b \\ c(0)=p \end{array} \right\}$$

時刻 0 で 点 p を通る U_1 上の曲線の集合

Recall：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Curve}(U_1;p) & \to & T_pU_1 \\ c & \mapsto & \dot{c}(0) \end{array}$$ は全射

(cf. Prop 6.2.5)

Prop 6.3.2 : $\forall c \in \mathrm{Curve}(U_1, p)$,

$$(d\varphi)_p(\dot{c}(0)) = (\dot{\varphi \circ c})(0)$$

in $T_{\varphi(p)}U_2$

Hint : Thm 6.1.3

全微分 $(d\varphi)_p$ は上の命題の性質で特徴付けられる.

Theorem 6.3.3.

写像 $\Xi : T_p U_1 \to T_{\varphi(p)} U_2$ が

"$\forall c \in \mathrm{Curve}(U_1, p)$,

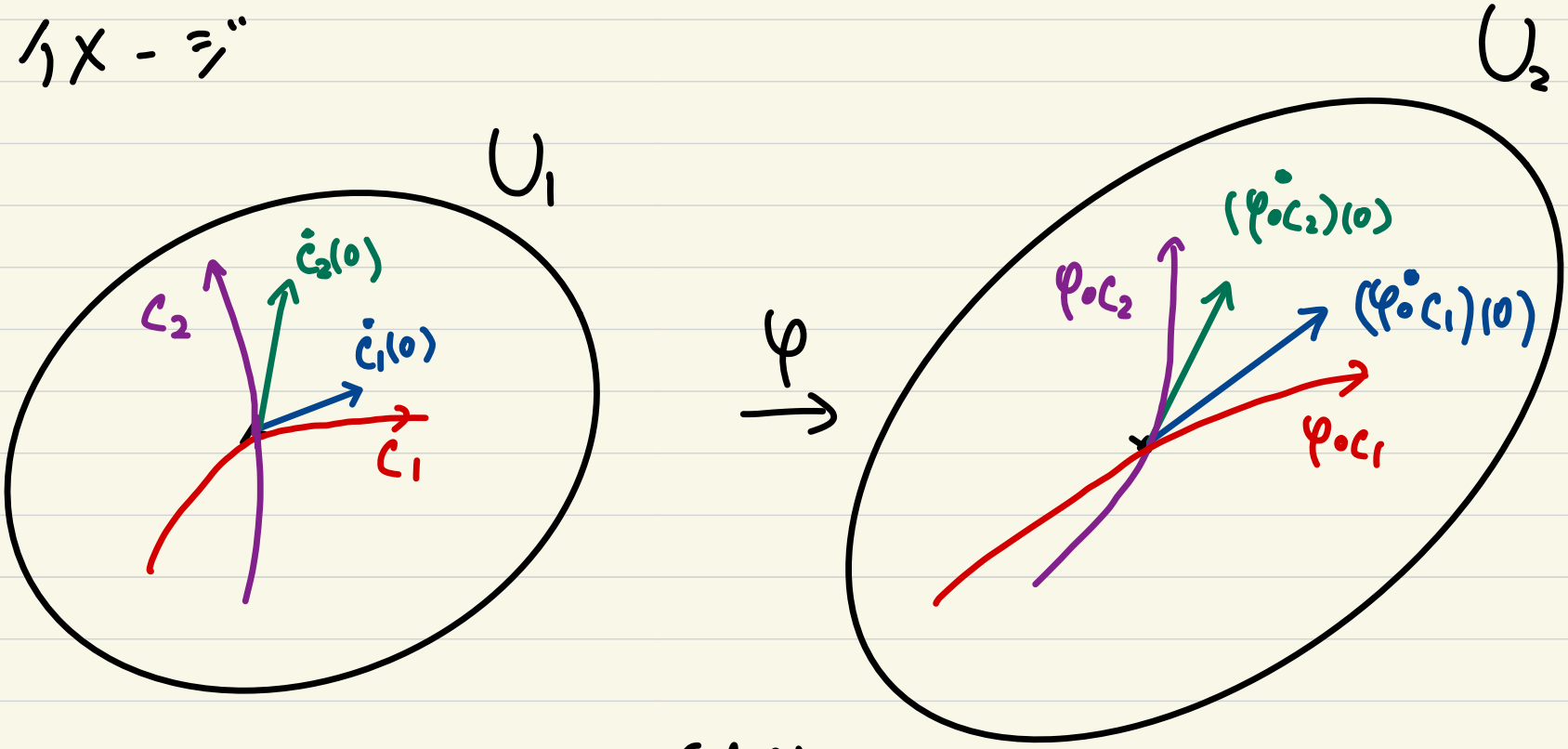
$$\Xi(\dot{c}(0)) = (\dot{\varphi \circ c})(0)$$"

を満たすなら $\Xi = (d\varphi)_p$

Hint : $\mathrm{Curve}(U_1 ; p) \to T_p U_1$ は全射

$$c \mapsto \dot{c}(0)$$

イメージ



$$\dot{c}_1(0) \overset{(d\varphi)_p}{\longmapsto} (\varphi \circ c_1)^{\bullet}(0)$$

$$\dot{c}_2(0) \longmapsto (\varphi \circ c_2)^{\bullet}(0)$$

曲線の対応関係が分かれば

全微分 $(d\varphi)_p$ が計算できる場合がある.

Ex 6.3.4 :

$$c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, 2t^3)$$
$$c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t^2, t)$$

とする.

C^∞級写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ が以下を満たすとする:

$$\varphi((0,0)) = (0,0,1)$$
$$\varphi \circ c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, 2t, 1)$$
$$\varphi \circ c_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (0, 2t, t+1)$$

Claim : このとき $p=(0,0)$ とおくと

$$(d\varphi)_p\left(a\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + b\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p\right)$$

$$= a\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)} + 2(a+b)\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)} + b\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right)_{\varphi(p)}$$

∵ $\dot{c}_1(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p \qquad \dot{c}_2(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p$

$(\varphi\circ c_1)^{\cdot}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)} + 2\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)}$, $(\varphi\circ c_2)^{\cdot}(0) = 2\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)} + \left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right)_{\varphi(p)}$

また $(d\varphi)_p$ の表現行列 $(J\varphi)_p$ は

$$(J\varphi)_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

特に $\operatorname{rank}(d\varphi)_p = \operatorname{rank}(J\varphi)_p = 2.$

Section 6.3 終