Section 7：局所座標系

意義：位相空間上の局所座標系を定義する.

Part II：可微分多様体の定義，各種構成

- Section 7：局所座標系 ☆
- 8：座標変換
- 9：可微分多様体
- 10：正則部分多様体
- 11：射影空間
- 12：C^∞級関数の構成

内容

- 位相空間論の各種命題の復習
- 局所座標系の定義
- 関数の局所座標上の C^∞ 性

Section 7.1 : 位相空間論の各種命題

今後よく使う位相空間論の命題を整理しておく.

設定

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$: 位相空間

相対位相の復習

Def 7.1.1: 各部分集合 $A \subset X$ について

$$\mathcal{O}_X(A) := \{ A \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X \}$$
$$(\subset \mathcal{P}(A))$$

を $\mathcal{O}_X$ の定める A の相対位相とよぶ

Prop 7.1.2: A を X の部分集合とし
包含写像を $\iota : A \hookrightarrow X$ とおく.

このとき $\mathcal{O}_X(A)$ は
"ι を連続とするような最弱な位相".

Prop 7.1.3: $B \subset A \subset X$ とする.

このとき

$$\mathcal{O}_X(B) = (\mathcal{O}_X(A))(B)$$

相対位相の相対位相は相対位相

Prop 7.1.4: $U \in \mathcal{O}_X$ (i.e. UはXの開集合)とする.

部分集合 $V \subset U$ について以下は同値

(i) $V \in \mathcal{O}_X(U)$ (V は open in U)

$\Updownarrow$

(ii) $V \in \mathcal{O}_X$ (V は open in X)

Remark: U が X の開集合でない場合は同様の命題は成り立たない.

($V = U$ とすると反例になる)

同相写像についての復習

Prop 7.1.5

$\phi : X \to Y$: 全単射連続写像とする.

以下は同値

(i) ϕ は同相 (i.e. $\phi^{-1} : Y \to X$ も連続)

(ii) ϕ は開写像 (i.e. $^\forall U \in \mathcal{O}_X$, $\phi(U) \in \mathcal{O}_Y$)

Prop 7.1.6: $A \subset X$, $B \subset Y$ とし、

相対位相 $\mathcal{O}_X(A)$, $\mathcal{O}_Y(B)$ により A, B をそれぞれ位相空間とみなす。

(1) $\phi : X \to Y$ を連続写像であって

$\phi(A) \subset B$ となるものとする。

ϕ は A から B への写像としても連続。

(2) $\phi : X \to Y$ を同相写像であって、

$\phi(A) = B$ となるものとする。

ϕ は A から B への写像としても同相。

Section 7.1 終

Section 7.2 : 局所座標系の定義

位相空間上の局所座標系の定義を述べる.

設定 : $M = (M, \mathcal{O}_M)$: 位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def. 7.2. (局所座標系)

$O \underset{\text{open}}{\subset} M$　　$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とし、

相対位相により位相空間とみなす。

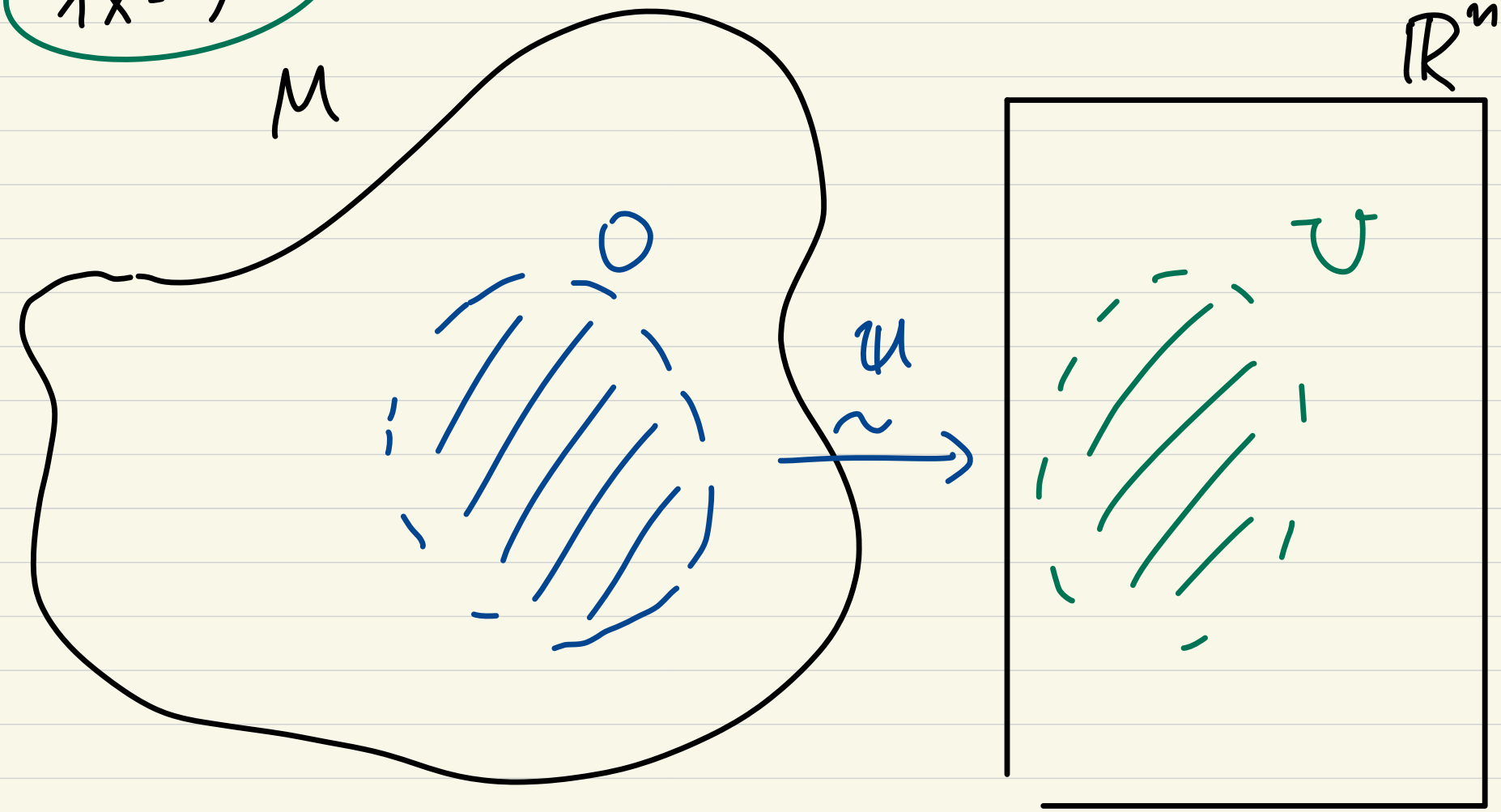
また $u : O \to U$ を同相写像とする。

このとき

組 (O, U, u) を M の n 次元局所座標系とよぶ。

また u を O 上の n 次元局所座標とよぶ。

イメージ



O の"地図"

すぐ後で例を紹介する.

以下の記号を準備しておく.

Def. 7.2.2

$$LC(M;\mathbb{R}^n) := \{(O, U, \varphi) \mid M \text{ の } n \text{ 次元局所座標系}\}$$

Local coordinate

local coordinate system

(この講義の独自記号なので注意)

Ex 7.2.2 (自明な例)

$M = U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とする

$(\underset{\overset{\shortparallel}{M}}{U}, U, \mathrm{id}_U) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$

Ex 7.23（球面上の局所座標系）

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし，

openではない

$$S^n := \left\{ x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とおく．

相対位相により S^n を位相空間とみなす．

（連結，コンパクト，ハウスドルフ）

$$O := \{ x \in S^n \mid x_{n+1} > 0 \} \subset S^n$$

$$U := \left\{ u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

とし，

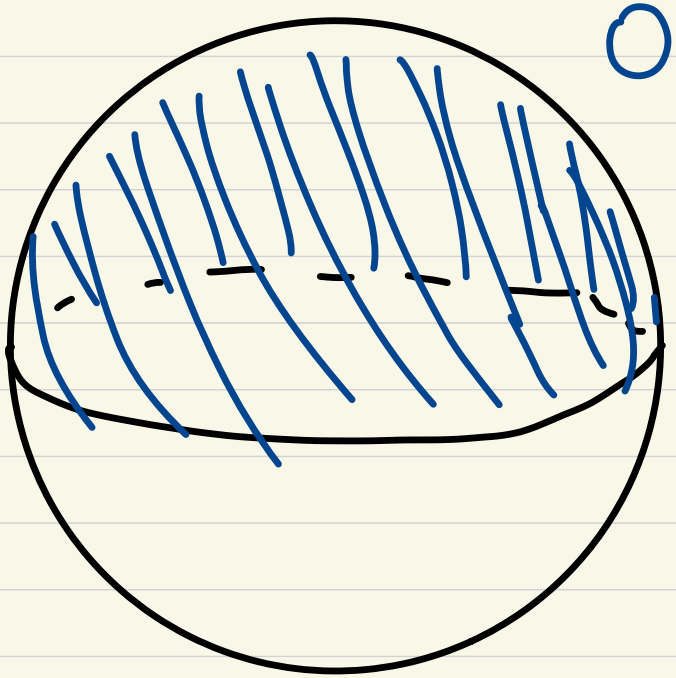
$$\mathcal{U} : O \to U, \quad x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$$

とおく．

イメージ

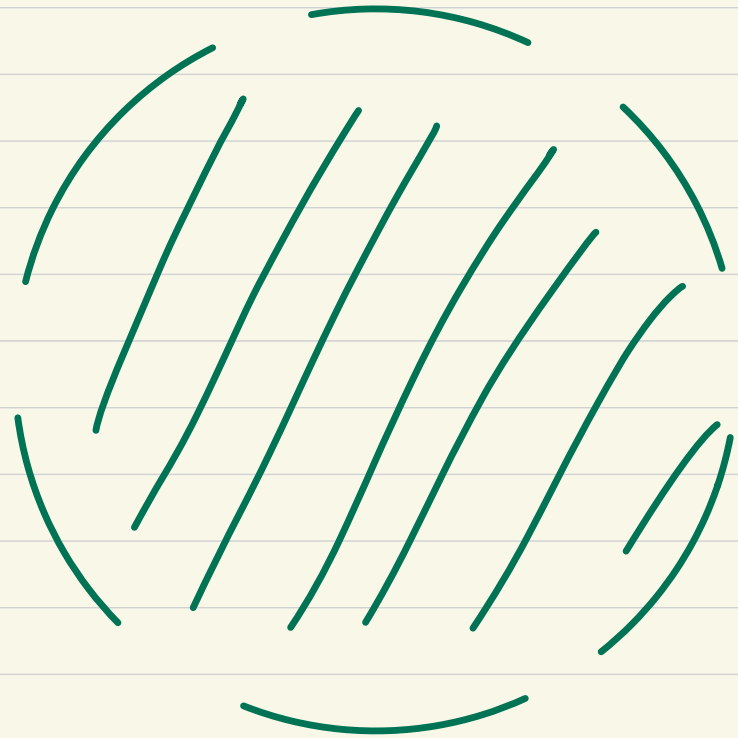
$n=2$ の場合

$O \underset{\text{open}}{\subset} S^2$



$$\xrightarrow[\sim]{\mathbb{U}}$$

$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$



Claim : $(O, U, \mathcal{U}) \in \mathcal{LC}(S^n ; \mathbb{R}^n)$

Proof : 示

① $O \underset{\text{open}}{\subset} S^n$

② $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

③ $\mathcal{U} : O \to U$ は well-defined で同相写像

値域に注意

① を示す：

示 $O \underset{\text{open}}{\subset} S^n$.

$$O = S^n \cap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}}_{\text{open in } \cancel{\mathbb{R}^n}\ \mathbb{R}^{n+1}}$$

より O : open in S^n

（① 証明終）

② を示す：

示 $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$.

多項式関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ u \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i^2$

は $\mathbb{R}^n$ 上連続であり，

$U = f^{-1}((-\infty, 1))$ $\quad ((-\infty, 1) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R})$

より U は open in $\mathbb{R}^n$

（② 証明終）

③ を示す：

示 Ⓐ $\mathfrak{U} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ は well-defined

Ⓑ $\mathfrak{U}$ は同相写像

Ⓐ を示す.

示 $\forall x \in O,\ (x_1, \cdots, x_n) \in U$

$x \in O$ を任意にとる.

示 $(x_1, \cdots, x_n) \in U$ i.e. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1$

$x \in O$ より $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ かつ $x_{n+1} > 0$.

従って $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 - x_{n+1}^2 < 1$ （Ⓐ証明終）

Ⓑを示す：

$$\phi : U \to O, \quad (u_1, \cdots, u_n) \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$$

とおく.

以下を示せばよい

示 ① ϕ は well-defined.

② ϕ は $\mathfrak{u}$ の逆写像 $\left(\text{i.e. } \phi \circ \mathfrak{u} = id_O \text{ かつ } \mathfrak{u} \circ \phi = id_U \right)$

㈡ $\mathfrak{u}$ は連続

㈢ ϕ は連続

値が定まることを確認

値域の元であることを確認

(イ) を示す：

示 $\forall u \in U$, $1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$ かつ

$$\left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right) \in O.$$

$u \in U$ を任意にとる.

U の定義から $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1$ より $1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$.

示 $\left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right) \in O$.

i.e. $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \left(\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)^2 = 1$

左辺 $= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \left(\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)^2$

$= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2$

$= 1 =$ 右辺

（① 証明終）

□ を示す：

示 (i) $\phi \circ \psi = id_O$

(ii) $\psi \circ \phi = id_U$

(i) を示す：

$x \in O$ を任意にとる。

示 $(\phi \circ \psi)(x) = x$

証明 $= \phi(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2})$

ここで $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$, $x_{n+1} > 0$ ($\because x \in O$) に注意すると

$$x_{n+1} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

よって 左辺 $= (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = x =$ 右辺.

(ⓘ証明終)

ⓘⓘ を示す: $u \in U$ を任意にとる.

示 $\psi \circ \phi(u) = u$

左辺 $= \mathbb{u}\left(u_1, \cdots u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$

$= (u_1, \cdots, u_n) = u$ = 右辺

(ii 証明終)

(ロ 証明終)

(1) を示す：

示 $u : O \to U$ は連続

以下を示せば十分 ($\because$ Prop 7.1.1 & 7.1.6 (1))

示 $\exists \tilde{u} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$: 連続 s.t. $\tilde{u}|_O = u$

$\tilde{u} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ とする

各成分が連続関数（射影関数）

なので $\tilde{u}$ は連続 ($\because$ Prop 5.1.6)

また定義から $\tilde{u}|_O = u$

((1) 証明終)

㊀を示す：

示 $\phi : U \to O$ は連続 $\subset \mathbb{R}^{n+1}$

以下を示せば十分（∵ Prop 7.1.6 (1)）

示 ϕ は $\mathbb{R}^{n+1}$ への写像として連続

$\phi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, $(u_1, \cdots, u_n) \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$

とおくと各成分が連続（最後の成分は Ex 3.2.4）

なので ϕ も連続（∵ Prop 5.1.6）

（㊀証明終）（Ⓑ証明終）（Ⓐ証明終）□

次の命題は今後よく使う

Prop 7.2.4

$(O, U, \mathfrak{u}) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ とする.

また $O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$ を fix.

このとき

$$(O_0, \mathfrak{u}(O_0), \mathfrak{u}|_{O_0} : O_0 \to \mathfrak{u}(O_0)) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$$

Proof of Prop 7.2.4

示 ① $\underset{\text{open}}{O_0 \subset M}$

② $\underset{\text{open}}{u(O_0) \subset \mathbb{R}^n}$

③ $u|_{O_0} : O_0 \to u(O_0)$ は同相写像

① を示す

示 $O_0 \underset{\text{open}}{\subset} M$.

$O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$ という $O \underset{\text{open}}{\subset} M$ より

$O_0 \underset{\text{open}}{\subset} M$ (∵ Prop 7.1.4)

(① 証明終)

② を示す

示 $u(O_0) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

いま $u : O \to U$ は同相写像なので、

特に開写像 ($\because$ Prop 7.1.5)

従って $u(O_0) \subset U$: open ($\because O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$)

いま $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ なので $u(O_0) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ ($\because$ Prop 7.1.4)

(② 証明終)

Mからの相対位相　　$\mathbb{R}^n$からの相対位相

③を示す：示 $u|_{O_0} : O_0 \to u(O_0)$

は同相写像

O_0の位相は Oからの相対位相とみなしてよく，

$u(O_0)$の位相は Uからの相対位相とみなしてよい

(∵ Prop 7.1.3)

いま $u : O \to U$ は同相写像なので

$u|_{O_0} : O_0 \to u(O_0)$ も同相写像

(∵ Prop 7.1.6 (2))

(③証明終)　　$\boxtimes$

言葉の定義

Def 7.2.5 :

$p \in M$, $(O, U, u) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ とする.
$p \in O$ とするとき
(O, U, u) を p のまわりの
n 次元局所座標系 とよぶ

Ex 7.2.6 : Ex 7.2.3 において
$p = (0, 0, \cdots, 0, 1) \in S^n$ とおくと
(O, U, u) は p のまわりの n 次元局所座標系

Section 7.2 終

Section 7.3：関数の局所座標上の C^∞ 性

設定：M：位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(O, U, u) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$

記号：

$C(M)$：M 上の連続関数全体のなす $\mathbb{R}$ 代数

(cf. Ex 2.2.3)

記号：各 $f \in C(M)$ について

$f_{\mathfrak{U}} \in C(U)$ を

$$f_{\mathfrak{U}} := (\mathfrak{U}^{-1})^*(f|_O) = f \circ \mathfrak{U}^{-1}$$

$$: U \to \mathbb{R},\ u \mapsto f(\mathfrak{U}^{-1}(u))$$

として定める.

$$\left(\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\mathfrak{U}^{-1}"] & O \subset M \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \right.$$

$\cap$ open

$\mathbb{R}^n$

Remark: "$C^\infty(M)$" の定義はまだない.

"$(O, U, \mathfrak{u})$ 上の C^∞性" を以下で定義する.

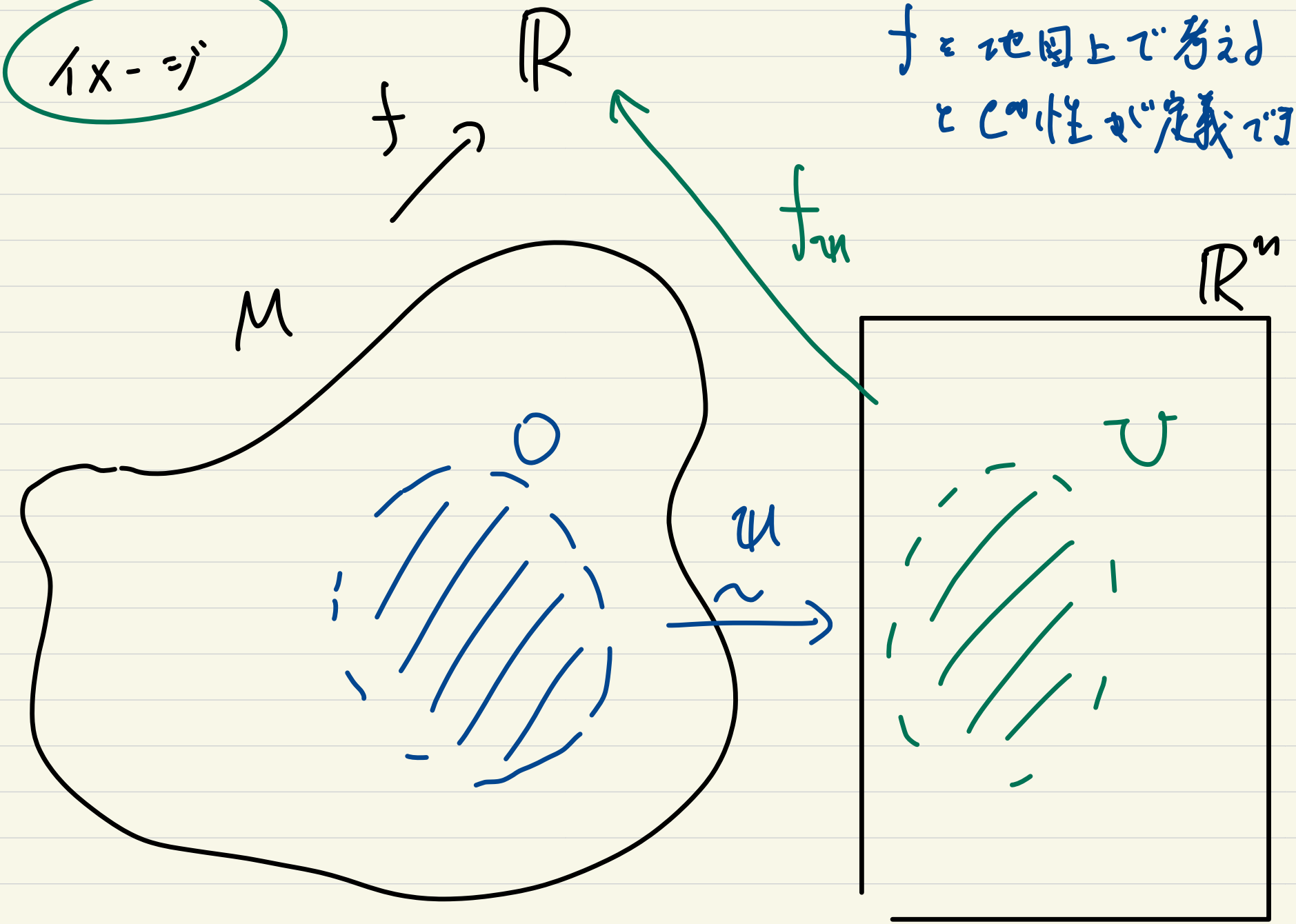
Def. 7.3.1: $f \in C(M)$ が

$(O, U, \mathfrak{u})$ 上 C^∞級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f_{\mathfrak{u}} \in C^\infty(U)$ ← 定義されている!

(この講義の独自の用語なので注意)

イメージ



fを地図上で考えるとC^∞性が定義できる.

注：いまの設定で

"写像 $\begin{array}{l} u : O \to U \\ u^{-1} : U \to O \end{array}$ は C^∞ 級写像か？"

という問いは意味を持たない

（定義がない）

Section 5 の設定を確認せよ！

記号の準備

Def. 7.3.2

$$C^\infty(M;(O,U,u)) := \{ f \in C(M) \mid f \text{ は } (O,U,u) \text{ 上 } C^\infty \text{ 級} \}$$

Prop 7.3.3

$C^\infty(M;(O,U,u))$ は $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

Ex 7.3.4 : Ex 7.2.3 の設定で考える.

$$f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

とおく.

$$x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto x_{n+1}$$

Claim : $f \in C^\infty(S^n ; (O, U, u))$

示 ① $f : M \to \mathbb{R}$ は連続

② $f_u : \underset{\mathbb{R}^n \text{ open}}{U} \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数

①を示す：$\tilde{f}: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_{n+1}$ は連続

いま $\tilde{f}|_{S^n} = f$ より f も連続

(∵ Prop 7.1.6 (1))

②を示す：

$u^{-1}: U \to O,\ u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$

に注意すると

$f_u := f \circ u^{-1}: U \to \mathbb{R},\ u \mapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}$

これは C^∞ 級 (∵ Ex 3.2.4) 図

Section 7.3 終