Section 8 : 座標変換と C^∞-atlas

意義 : 局所座標系の間の"変換"を定義する.

また"整合性のある地図帳"として C^∞-atlas を定義する.

Part II : 可微分多様体の定義, 各種構成

Section 7 : 局所座標系

8 : 座標変換 ☆

9 : 可微分多様体

10 : 正則部分多様体

11 : 射影空間

12 : C^∞ 級関数の構成

多様体論の難所：① 接空間

② C^∞級写像とその微分

新しい視点なので難しい

（もうやった）

地図同士の整合性 → ③ 座標変換

④ 極大 atlas

ややこしいだけ（訓練あるのみ）

"完全版"地図帳 →

内容

- 座標変換の定義
- 座標変換の C^∞ 性
- C^∞-atlas と C^∞ 級関数

地図帳

Section 8.1: 座標変換の定義

この節では座標変換の定義を述べる.

設定: M : 位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$

記号

$\mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$: M の n 次元局所座標系全体の集合

$$\mathfrak{u}(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

$$\mathfrak{v}(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$ に注意.

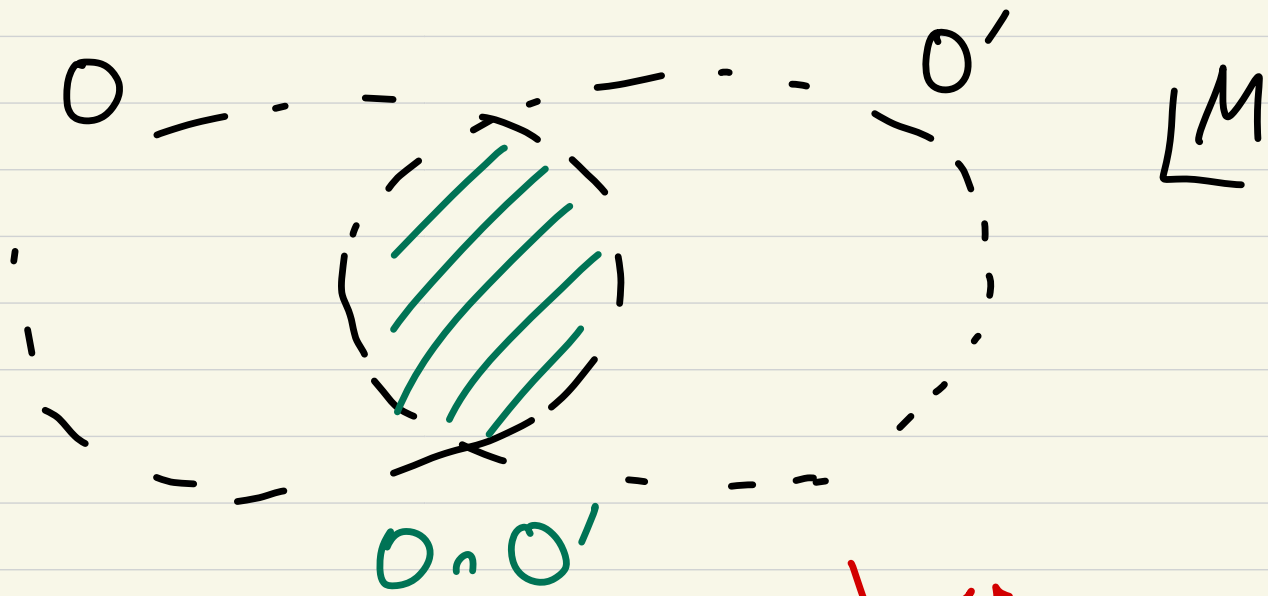
Def. 8.1.1: "2枚の地図を見比べる".

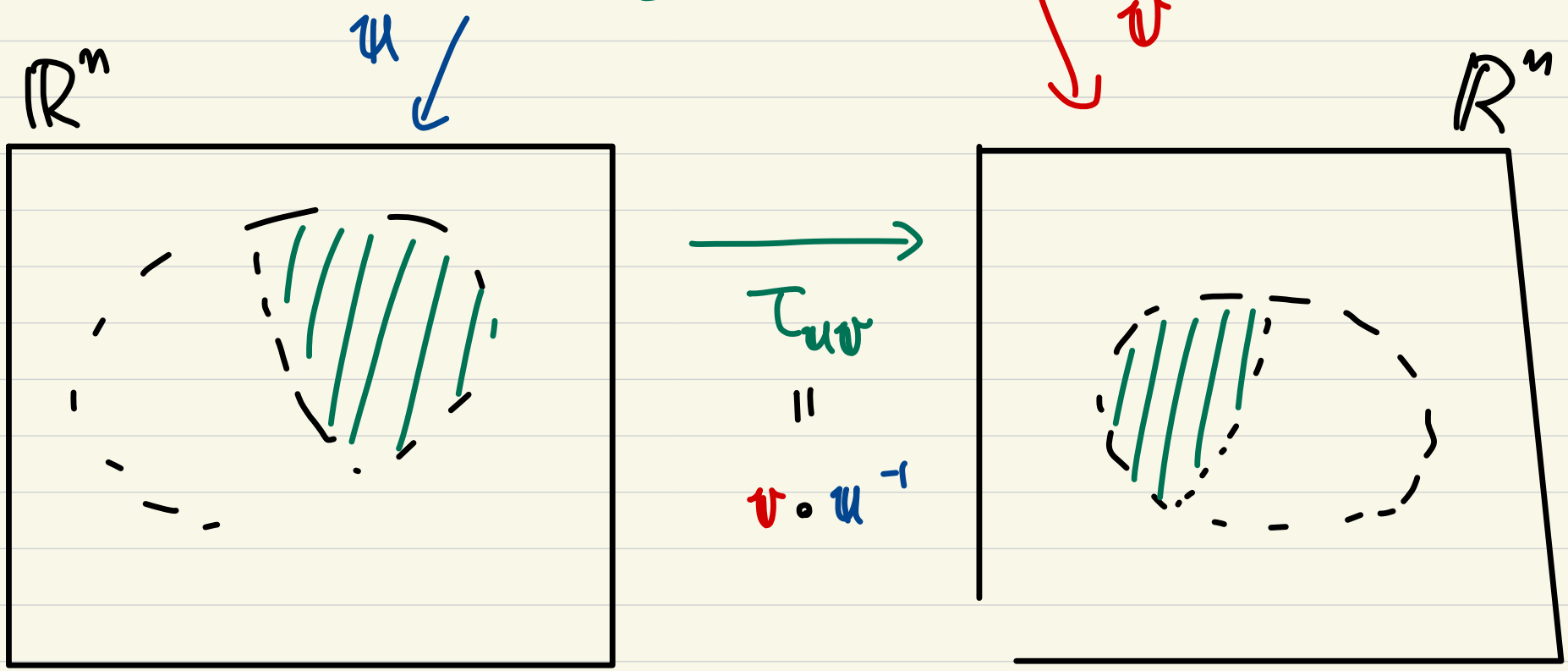
$$\begin{aligned} \tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} &: \mathfrak{u}(O \cap O') \to \mathfrak{v}(O \cap O') \\ &\quad\ u \mapsto \mathfrak{v}(\mathfrak{u}^{-1}(u)) \end{aligned}$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathfrak{v} \circ \mathfrak{u}^{-1}}$$

を $(O, U, \mathfrak{u})$ から $(O', V, \mathfrak{v})$ への座標変換という.

イメージ
丸暗記
おすすめ





Ex 8.1.2 : $n=2$ とする.

$O := \{ x \in S^2 \mid x_3 > 0 \}$

$U := \{ u \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \} \rightsquigarrow (O, U, \mathbb{u}) \in LC(S^2; \mathbb{R}^2)$

$\mathbb{u} : O \to U, \quad x \mapsto (x_1, x_2)$ (cf. Ex 7.2.3)

$\left(\mathbb{u}^{-1} : U \to O, \quad u \mapsto (u_1, u_2, \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}) \right)$

$O' := \{ x \in S^2 \mid x_2 > 0 \}$

$V := \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{n} v_i^2 < 1 \} \rightsquigarrow (O', V, \mathbb{v}) \in LC(S^2; \mathbb{R}^2)$

$\mathbb{v} : O' \to V, \quad x \mapsto (x_1, x_3)$

$\left(\mathbb{v}^{-1} : V \to O', \quad v \mapsto (v_1, \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}, v_2) \right)$

$$\begin{array}{ccccc}
u(O\cap O') & \xleftarrow{\;u\;} & O\cap O' & \xrightarrow{\;v\;} & v(O\cap O') \\
\| & & \| & & \| \\
\{u\in U \mid u_2>0\} & & \{x\in S^2 \mid x_2>0,\ x_3>0\} & & \{v\in V \mid v_2>0\} \\
\cap\ \text{open} & & & & \cap\ \text{open} \\
U & & & & V \\
\cap\ \text{open} & & & & \cap \\
\mathbb{R}^2 & & & & \mathbb{R}^2
\end{array}$$

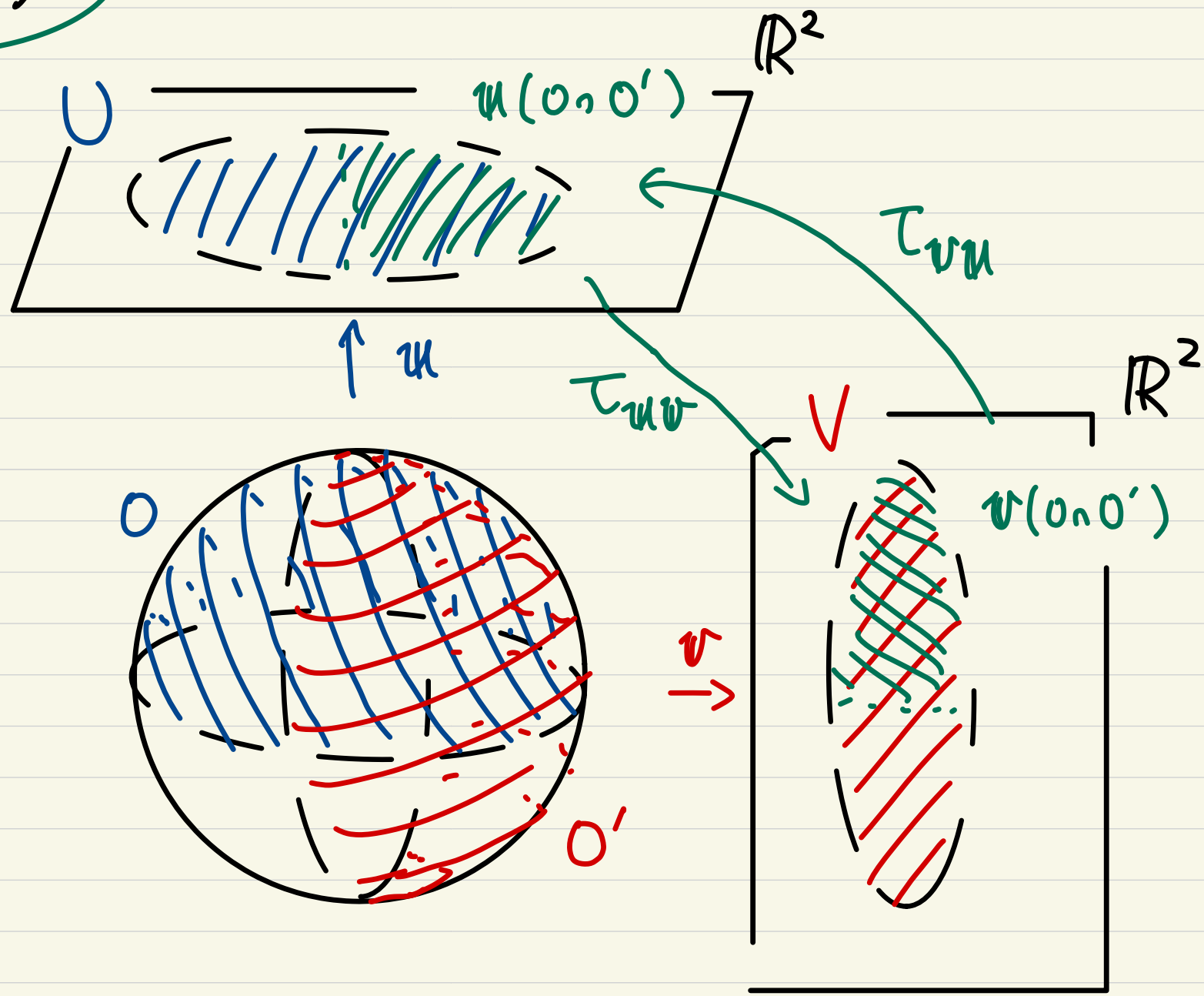
$$u \longmapsto v(u^{-1}(u)) = \left(u_1, \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}\right)$$

$$\tau_{uv}$$

$$u(v^{-1}(v)) = \left(v_1, \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}\right) \longleftarrow\!\shortmid\ v$$

$$\tau_{vu}$$

イメージ



よく使う命題をいくつか述べておく.

Prop 8.1.3 : (O, U, u) から (O, U, u) への座標変換 (自身)

$\tau_{uu} : u(O) \to u(O)$ は恒等写像

Prop 8.1.4 :

(O, U, u) から (O', V, v) への座標変換

$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$

と (O', V, v) から (O, U, u) への座標変換

$\tau_{vu} : v(O \cap O') \to u(O \cap O')$

は互いに逆写像

Prop 8.1.5: $(O_i, U_i, \mathcal{U}_i) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ $(i=1,2,3)$ とし、

このとき

$\mathcal{U}(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ から $\mathcal{U}_3(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ への写像として

$$\tau_{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_3}\Big|_{\mathcal{U}_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)} =$$

$$\left(\tau_{\mathcal{U}_2 \mathcal{U}_3}\Big|_{\mathcal{U}_2(O_1 \cap O_2 \cap O_3)}\right) \circ \left(\tau_{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2}\Big|_{\mathcal{U}_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)}\right)$$

Section 8.1 終

Section 8.2 : 座標変換の C^∞ 性

設定 : M : 位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(O, U, \mathbb{u}), \ (O', V, \mathbb{v}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$

記号 $T_{\mathbb{u}\mathbb{v}}$: $(O, U, \mathbb{u})$ から $(O', V, \mathbb{v})$ への座標変換

$T_{\mathbb{v}\mathbb{u}}$: $(O', V, \mathbb{v})$ から $(O, U, \mathbb{u})$ への座標変換

Q : 座標変換

$$\tau_{uv} : \underset{\substack{\cup \\ \mathbb{R}^n \text{ open}}}{u(O \cap O')} \to \underset{\substack{\cup \\ \mathbb{R}^n \text{ open}}}{v(O \cap O')}$$

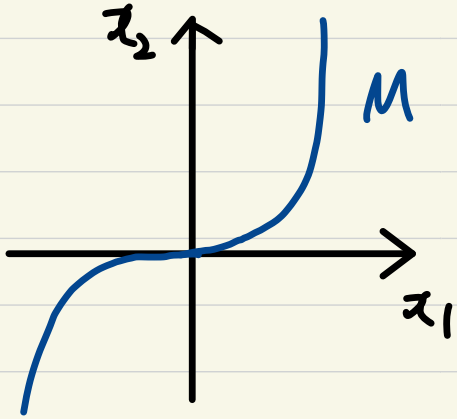
$$\tau_{vu} : \underset{\substack{\cup \\ \mathbb{R}^n \text{ open}}}{v(O \cap O')} \to \underset{\substack{\subset \\ \mathbb{R}^n \text{ open}}}{u(O \cap O')}$$

は共に C^∞ 級写像 ない？

A : No!

Ex 8.2.1 :

$M := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3 \} \subset \mathbb{R}^2$ とする.



$O := M$

$U := \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow (O, U, u) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R})$

$u : O \to U,\ x \mapsto x_1$ (同相)

$(u^{-1} : U \to O,\ u \mapsto (u, u^3))$

$O' := M$

$V := \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow (O', V, v) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R})$

$v : O' \to V,\ x \mapsto x_2$ (同相)

$(v^{-1} : V \to O',\ v \mapsto (v^{1/3}, v))$

このとき

$O \cap O' = M$, $u(O \cap O') = \mathbb{R}$, $v(O \cap O') = \mathbb{R}$

だっ

$$\tau_{uv} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto v(u^{-1}(u)) = u^3$$

$$\tau_{vu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto u(v^{-1}(v)) = v^{\frac{1}{3}}$$

$\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級ではない

（原点で微分不可能）

講義全体を通じたキーポイント：

<u>座標変換が C^∞ 級写像だとうれしい!!</u>

<u>Recall</u>:

$$(O\cap O',\ u(O\cap O'),\ u|_{O\cap O'} : O\cap O' \to u(O\cap O')) \in LC(M;\mathbb{R}^n)$$

かつ

$$(O\cap O',\ v(O\cap O'),\ v|_{O\cap O'} : O\cap O' \to v(O\cap O')) \in LC(M;\mathbb{R}^n)$$

(cf. Prop. 7.2.4)

座標変換が C^∞ 級写像だとうれしい理由

Theorem 8.2.2 :

座標変換 $\tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} : \mathfrak{u}(O \cap O') \to \mathfrak{v}(O \cap O')$
$\tau_{\mathfrak{v}\mathfrak{u}} : \mathfrak{v}(O \cap O') \to \mathfrak{u}(O \cap O')$
が共に C^∞ 級写像であるとする.

このとき $f \in C(M)$ について次下は同値

(i) $f \in C^\infty(M; (O \cap O', \mathfrak{u}(O \cap O'), \mathfrak{u}|_{O \cap O'}))$

$\Updownarrow$

(ii) $f \in C^\infty(M; (O \cap O', \mathfrak{v}(O \cap O'), \mathfrak{v}|_{O \cap O'}))$

"f の C^∞ 性の定義" が $O \cap O'$ 上で一致

証明の準備

Lemma 8.2.3 : 各 $f \in C(M)$ に対して

(1) $f_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{V}(O \cap O')} = f_{\mathcal{V}}|_{O \cap O'}$.

(2) $f_{\mathcal{U}}|_{\mathcal{V}(O \cap O')} = f_{\mathcal{U}}|_{O \cap O'}$.

(3) $f_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{V}(O \cap O')} = \tau^*_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\left(f_{\mathcal{U}}|_{\mathcal{U}(O \cap O')}\right)$.

(4) $f_{\mathcal{U}}|_{\mathcal{V}(O \cap O')} = \tau^*_{\mathcal{U}\mathcal{V}}\left(f_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{V}(O \cap O')}\right)$.

Proof of Thm 8.2.2 : (i) ⇒ (ii) について.

(i) を仮定する. (ii) を示そう.

Lemma 8.2.3 (1) より以下を示せばよい:

示 $f_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{V}(O\cap O')} \in C^\infty(\mathcal{V}(O\cap O'))$.

Lemma 8.2.3 (3) より

$$f_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{V}(O\cap O')} = \tau^*_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\left(f_{\mathcal{U}}|_{\mathcal{U}(O\cap O')}\right).$$

ここで (i) と Lemma 8.2.3 (2) より

$$f_{\mathcal{U}}\big|_{\mathcal{U}(O\cap O')} \in C^\infty(\mathcal{U}(O\cap O')).$$

← 設定

$\tau_{\mathcal{V}\mathcal{U}} : \mathcal{V}(O\cap O') \to \mathcal{U}(O\cap O')$ は C^∞ 級写像 なので

$$f_{\mathcal{V}}\big|_{\mathcal{V}(O\cap O')} = \tau^*_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\left(f_{\mathcal{U}}\big|_{\mathcal{U}(O\cap O')}\right) \in C^\infty(\mathcal{V}(O\cap O')).$$

これで (i) ⇒ (ii) が示された.

(ii) ⇒ (i) についても同様.

$\boxtimes$

Ex 8.2.4 : Ex 8.1.2 の設定で考える.

$$\mathfrak{u}(O\cap O') \xleftarrow{\mathfrak{u}} O\cap O' \xrightarrow{\mathfrak{v}} \mathfrak{v}(O\cap O')$$

$$\mathfrak{u}(O\cap O') = \left\{ u\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1^2+u_2^2<1 \\ u_2>0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ open}$$

$$O\cap O' = \{x\in S^2 \mid x_2>0,\ x_3>0\}$$

$\mathbb{R}^3$ の開集合ではない

$$\mathfrak{v}(O\cap O') = \left\{ v\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} v_1^2+v_2^2<1 \\ v_2>0 \end{array} \right\} \text{ open} \subset \mathbb{R}^2$$

座標変換

$$T_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} : \mathfrak{u}(O\cap O') \to \mathfrak{v}(O\cap O'),\quad u \mapsto (u_1, \sqrt{1-u_1^2-u_2^2})$$

$$T_{\mathfrak{v}\mathfrak{u}} : \mathfrak{v}(O\cap O') \to \mathfrak{u}(O\cap O'),\quad v \mapsto (v_1, \sqrt{1-v_1^2-v_2^2})$$

はどちらも C^∞ 級

(cf. Ex 3.2.4, Prop 5.1.3 : 定義域に注意)

特に Thm 8.2.2 より

任意の $f \in C(S^2)$ について

$$f \in C^\infty(S^2; (O \cap O', \mathfrak{u}(O \cap O'), \mathfrak{u}|_{O \cap O'}))$$

$$\iff f \in C^\infty(S^2; (O \cap O', \mathfrak{v}(O \cap O'), \mathfrak{v}|_{O \cap O'}))$$

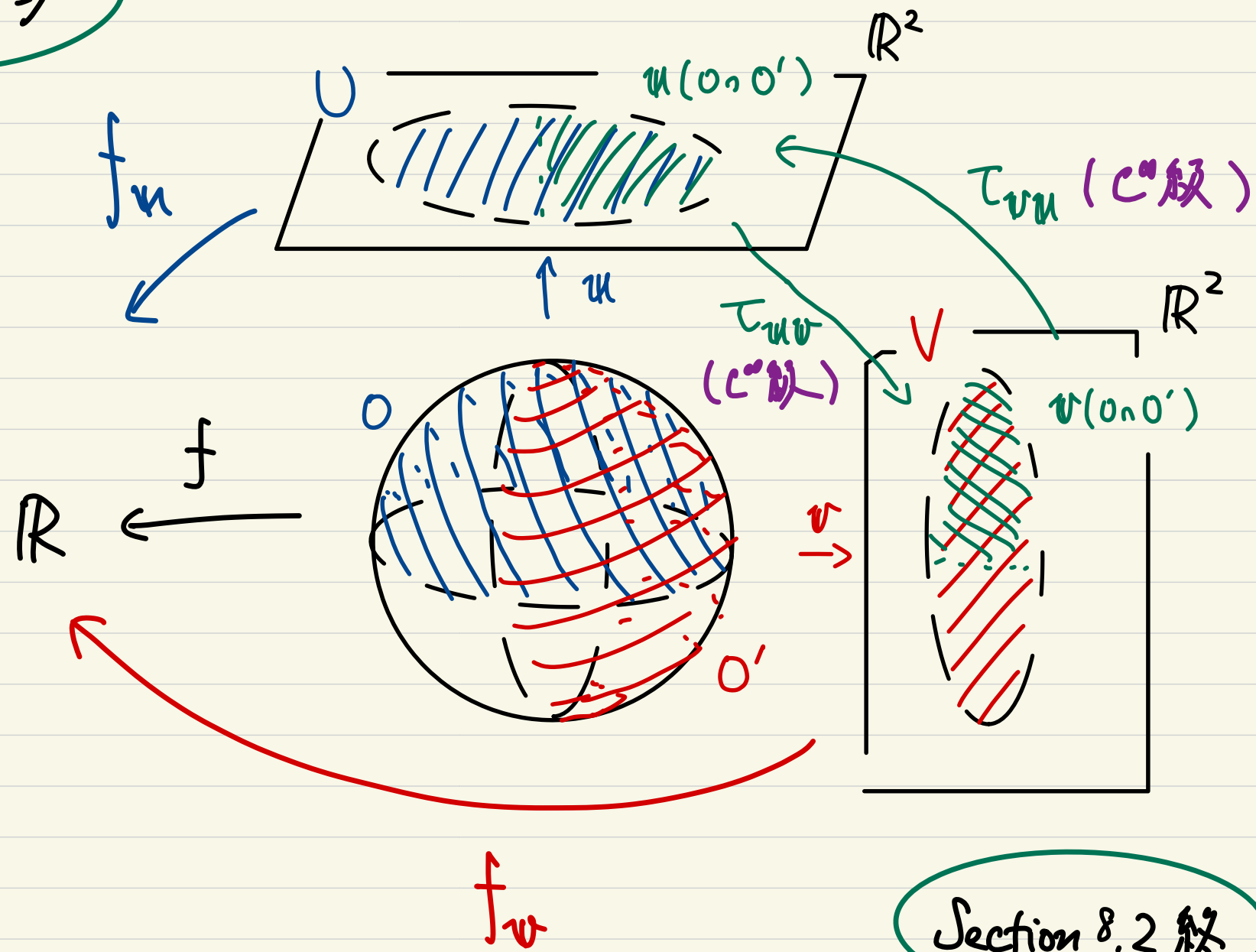
"f は $O \cap O'$ において C^∞ 級" に 2種類の意味があるが

① 地図 $\mathfrak{u}$ で考える

② 地図 $\mathfrak{v}$ で考える

実は同値である.

イメージ



Section 8.2 終

Section 8.3 C^∞-atlas と C^∞級関数

この節では C^∞-atlas (地図帳) と、
その上の C^∞級関数を定義する。

設定 : M : 位相空間
$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 : $\mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$: M の n次元局所座標系全体の集合

Def. 8.3.1

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ が M の C^∞-atlas

地図帳

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ① $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u)\in\mathcal{A}_0} O = M$

かつ

M のすべての地点をカバー

② $\forall (O,U,u), \forall (O',V,v) \in \mathcal{A}_0$ ~~$\in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$~~,

座標変換

$$\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$$
$$u \mapsto v(u^{-1}(u))$$

は C^∞級写像

地図同士の整合性がとれている

(すぐ後で例を紹介する)

C^∞-atlas 上の C^∞ 級関数を以下で定義

Def. 8.3.2: $\mathcal{A}_0$ を M の C^∞-atlas とする.

$f \in C(M)$ が $\mathcal{A}_0$ 上 C^∞ 級

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$, $f \in C^\infty(M; (O, U, u))$

また $C^\infty(M; \mathcal{A}_0) := \{ f \in C(M) \mid f$ は $\mathcal{A}_0$ 上 C^∞ 級$\}$

とおく.

$$\left(\text{i.e. } C^\infty(M; \mathcal{A}_0) := \bigcap_{(O, U, u) \in \mathcal{A}_0} C^\infty(M; (O, U, u)) \right)$$

関数 f の連続性についての Remark

Prop 8.3.3 : $f : M \to \mathbb{R}$ (i.e. $f \in \mathbb{R}^M$) について

連続性を仮定しない

以下は同値

(i) $f \in C^\infty(M; A_0)$.

$\Updownarrow$

(ii) $\forall (O, U, \mathfrak{u}) \in A_0$, $f \circ \mathfrak{u}^{-1} \in C^\infty(U)$.

非自明なのは "(ii) $\Rightarrow$ f は連続"

Hint：次の位相空間論の命題を用いよ．

Lemma 8.3.4

X, Y を位相空間とし，

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の開被覆とする．

また $f : X \to Y$ を写像とする．

次は同値

(i) $f : X \to Y$ は連続

(ii) 各 $\lambda \in \Lambda$ について $f|_{U_\lambda} : U_\lambda \to Y$ は連続

次の命題は重要:

Prop 8.3.5: $\mathcal{A}_0$ を M の C^∞-atlas とする.

このとき $C^\infty(M;\mathcal{A}_0)$ は $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

Hint: Prop 7.3.3, Prop 2.2.4

☆ これを定義したかった!

(次の Section でもう少し細かい話をする)

Ex 8.3.6 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし

$$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とする.

各 $k = 1, \cdots, n+1$ について

$$O_k^+ := \{ x \in S^n \mid x_k > 0 \}$$

$$U_k^+ := \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \}$$

$$\mathfrak{U}_k^+ : O_i^+ \to U_i^+ , \quad x \mapsto (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1})$$

$$\left((\mathfrak{U}_k^+)^{-1} : U_i^+ \to O_i^+ , \ u \mapsto (u_1, \cdots, u_{k-1}, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}, u_k, \cdots, u_n) \right)$$

とおくと $(O_k^+, U_k^+, \mathfrak{U}_k^+) \in LC(S^n; \mathbb{R}^n)$

また各 $k=1,\cdots,n+1$ について

$O_k^- := \{x \in S^n \mid x_k < 0\}$

$U_k^- := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1\}$

$\varphi_k^- : O_i^- \to U_i^-,\ x \mapsto (x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_{n+1})$

$\left((\varphi_k^-)^{-1} : U_i^- \to O_i^-,\ u \mapsto (u_1,\cdots,u_{k-1},-\sqrt{1-\sum_{i=1}^n u_i^2},u_k,\cdots,u_n) \right)$

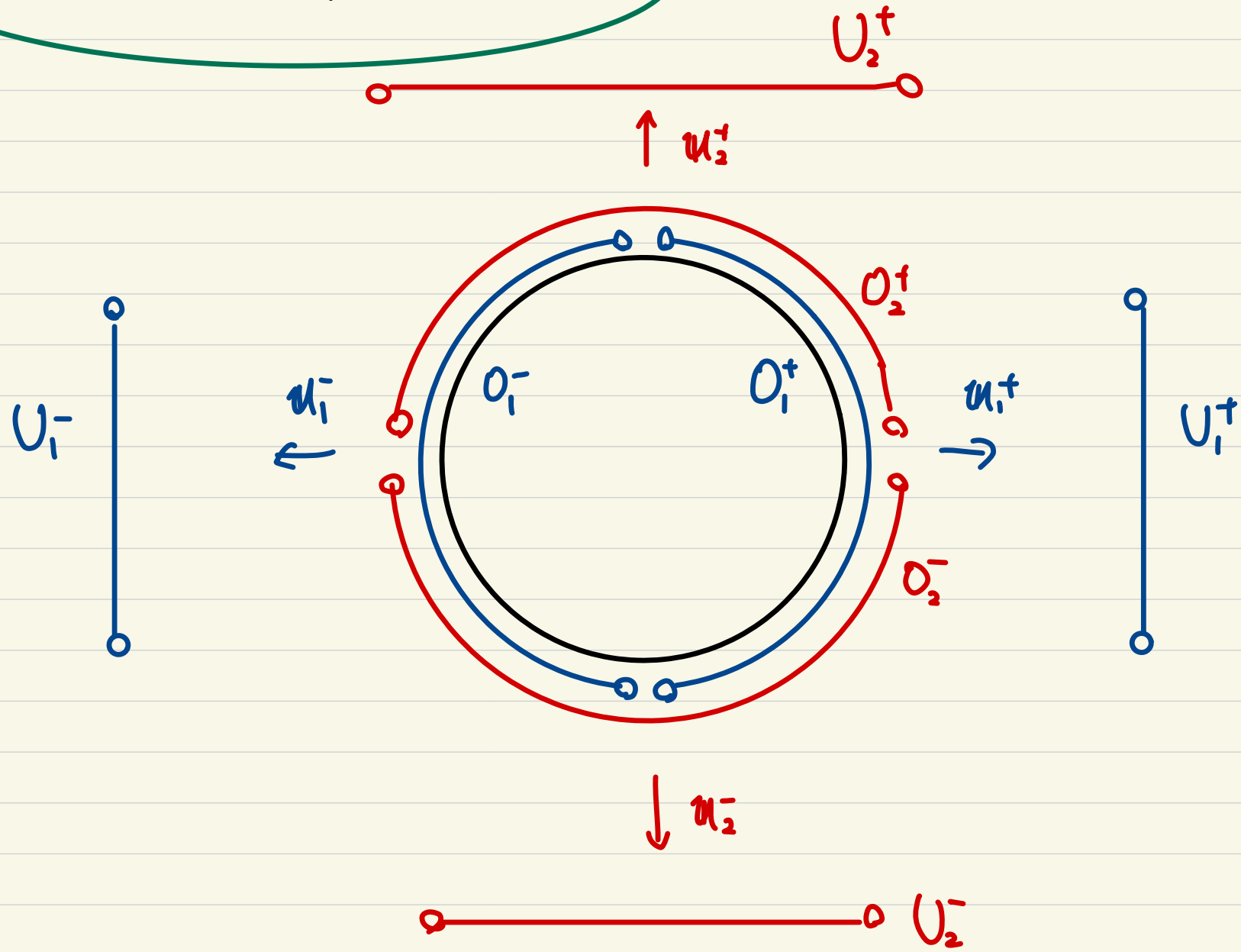
とおくと $(O_k^-, U_k^-, \varphi_k^-) \in LC(S^n;\mathbb{R}^n)$

ここで

$$A_0 := \{(O_k^+, U_k^+, \varphi_k^+) \mid k=1,\cdots,n+1\} \cup \{(O_k^-, U_k^-, \varphi_k^-) \mid k=1,\cdots,n+1\} \subset LC(S^n;\mathbb{R}^{n+1})$$

とおく.

イメージ：$n=1$ の場合



①について: $\bigcup_{(O,U,\mathcal{U})\in\mathcal{A}_0} O \subset S^n$ は明らか

以下を示せばよい

示. $\bigcup_{(O,U,\mathcal{U})\in\mathcal{A}_0} O \subset S^n$

i.e. $\forall x \in S^n,\ \exists (O,U,\mathcal{U}) \in \mathcal{A}_0,\ x \in O$

$\forall x \in S^n$ をとる. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ より $\exists k = 1, \cdots, n+1,\ x_k \neq 0$

$x_k > 0$ のとき $x \in O_k^+$ $((O_k^+, U_k^+, \mathcal{U}_k^+) \in \mathcal{A}_0)$

$x_k < 0$ のとき $x \in O_k^-$ $((O_k^-, U_k^-, \mathcal{U}_k^-) \in \mathcal{A}_0)$

(① 証明終)

② について：

示. $^\forall(O, U, u), {}^\forall(O', V, v) \in \mathcal{A}_0$ ~~with $O \cap O' \neq \emptyset$~~

$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$ は C^∞級写像

$(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}_0$ ~~with $O \cap O' \neq \emptyset$~~ を任意にとる.

$(O, U, u) = (O', V, v)$ の場合は

座標変換 $\tau_{uu} : u(O) \to u(O)$

は恒等写像 (cf. Prop 8.1.2) となり, 特に C^∞級写像

$(O, U, u) \neq (O', V, v)$ の場合を考える.

$k_1, k_2 = 1, \cdots, n+1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = +$ or $-$ とし,

$$(O, U, u) = (O_{k_1}^{\varepsilon_1}, U_{k_1}^{\varepsilon_1}, u_{k_1}^{\varepsilon_1})$$
$$(O', V, v) = (O_{k_2}^{\varepsilon_2}, U_{k_2}^{\varepsilon_2}, u_{k_2}^{\varepsilon_2})$$
とおく.

$k_1 = k_2$ の場合は $O \cap O' = \emptyset$ となる.

(特に $\tau_{uv} : \emptyset \to \emptyset$ は C^∞ 級 ($C^\infty(\emptyset) = \{0\}$)
無視して OK とする.

$k_1 \neq k_2$ の場合のみ考えればよい.

Case 1 : $k_1 < k_2$ のとき

記号の乱用

定義に従って計算すると

$$O \cap O' = \{ x \in S^n \mid \varepsilon_1 x_{k_1} > 0,\ \varepsilon_2 x_{k_2} > 0 \}$$

注意

$$\mathfrak{U}(O \cap O') = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1,\ \varepsilon_2 u_{k_2 - 1} > 0 \}$$

$$\mathfrak{V}(O \cap O') = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} v_i^2 < 1,\ \varepsilon_1 v_{k_1} > 0 \}$$

逆写像の形に注意して計算すると

$$\tau_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : \mathfrak{U}(O \cap O') \to \mathfrak{V}(O \cap O')$$

$$u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_{k_1 - 1}, \varepsilon_1 \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}, u_{k_1}, \cdots u_{k_2 - 2}, u_{k_2}, \cdots, u_n \right)$$

これは C^∞ 級写像 (cf. Prop 5.1.3 & Ex 3.2.4)

Case 2 : $k_1 > k_2$ のとき

定義に従って計算すると

$$O \cap O' = \{ x \in S^n \mid \varepsilon_2 x_{k_2} > 0,\ \varepsilon_1 x_{k_1} > 0 \}$$

$$\mathfrak{U}(O \cap O') = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1,\ \varepsilon_2 u_{k_2} > 0 \}$$

$$\mathfrak{V}(O \cap O') = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} v_i^2 < 1,\ \varepsilon_1 v_{k_1-1} > 0 \}$$

注意

逆写像の形に注意して計算すると

$$\tau_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}} : \mathfrak{U}(O \cap O') \to \mathfrak{V}(O \cap O')$$

$$u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_{k_2-1}, u_{k_2+1}, \cdots u_{k_1-1}, \varepsilon_2 \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}, u_{k_1}, \cdots, u_n \right)$$

これは C^∞ 級写像 (cf. Prop 5.1.3 & Ex 3.2.4)

■

Claim: $f : S^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_{n+1}$ は $\mathcal{A}_0$ 上 C^∞ 級

Proof: $f \in C(S^n)$ となることは Ex 7.3.4 でみた

以下を示せばよい

(示) $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0,\ f \in C^\infty(S^n; (O, U, u))$.

$(O, U, u) \in \mathcal{A}_0$ を任意にとる.

(示) $f \in C^\infty(S^n; (O, U, u))$ i.e. $f_u \in C^\infty(U)$

$\mathcal{A}_0$ の定義から

$$(O, U, u) = (O_k^\varepsilon, U_k^\varepsilon, u_k^\varepsilon)$$

(ただし $k = 1, \cdots, n+1,\ \varepsilon = +$ or $-$) と書ける.

ここで $U_k^\varepsilon = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1, \cancel{\varepsilon u_k > 0} \}$

また $(\psi_k^\varepsilon)^{-1}$ の形に注意して計算すると

$k = 1, \cdots, n$ のとき

$$f_{\psi_k^\varepsilon} = f \circ (\psi_k^\varepsilon)^{-1} : U_k^\varepsilon \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto u_n$$

$k = n+1$ のとき

$$f_{\psi_{n+1}^\varepsilon} = f \circ (\psi_{n+1}^\varepsilon)^{-1} : U_{n+1}^\varepsilon \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \varepsilon \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n u_i^2}$$

これは U_k^ε 上 C^∞ 級 (cf. Ex 3.2.4) ∎

Ex 8.3.6 では S^n （n 次元球面）に

C^∞-atlas $\mathcal{A}_0$ であって $\#\mathcal{A}_0 = 2n+2$ となるものを

構成した。

地図帳　　地図の枚数

Q1：地図を1枚にできないか？

（$\#\mathcal{A}_0 = 1$ となる S^n の C^∞-atlas は存在する？）

A1：不可能（証明は簡単ではない）

Q2：地図の枚数を減らせないか？

A2：2枚にはできる

（Section 9 で紹介）

Section 8.3 終