Section 8.4 : C^∞-atlas と C^∞級関数（続）

（追加 Section）

C^∞-atlas を固定する.

このとき"関数の C^∞性"や"局所座標の選び方に依らない"

ということをまとめておく.

設定 : M : 位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 8.4.1 $(O, U, \mathfrak{u}) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ を fix

$p \in O$

$f \in C(M)$ について

f は $(O, U, \mathfrak{u})$ 上 p のまわりで C^∞ 級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f_{\mathfrak{u}} : U \to \mathbb{R}$ が $\mathfrak{u}(p)$ のまわりで C^∞ 級

i.e. $\exists U_p \subset U$: $\mathfrak{u}(p)$ の開近傍

s.t. $f_{\mathfrak{u}}|_{U_p} \in C^\infty(U_p)$

Remark: f は $(O, U, \mathfrak{u})$ 上 C^∞ 級

$\Longleftrightarrow$ $\forall p \in O$, f は $(O, U, \mathfrak{u})$ 上 p のまわりで C^∞ 級

Thm 8.4.2 : (O, U, u), $(O', V, v) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ を fix

$p \in O \cap O'$

仮定: T_{uv}, T_{vu} はともに C^∞ 級写像とする.

$f \in C(M)$ について 以下は同値

(i) f は (O, U, u) 上 p のまわりで C^∞ 級

$\Updownarrow$

(ii) f は (O', V, v) 上 p のまわりで C^∞ 級

証明は Thm 8.2.2 とほぼ同じ.

以下 $\mathcal{A}_0$ を M 上の C^∞-atlas とする.

Def 8.4.3: $p \in M$ を fix.

$f \in C(M)$ について,

f は $\mathcal{A}_0$ 上 p のまわりで C^∞ 級

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$ with $p \in O$,

f は (O, U, u) 上 p のまわりで C^∞ 級

Remark: f は $\mathcal{A}_0$ 上 C^∞ 級

$\Longleftrightarrow$ $\forall p \in M$, f は $\mathcal{A}_0$ 上 p のまわりで C^∞ 級

この定理が成り立つように C^∞-atlas を定義した.

Thm 8.4.4: $p \in M$ を fix.

$f \in C(M)$ について以下は同値:

(i) f は $\mathcal{A}_0$ 上 p のまわりで C^∞ 級

(ii) $\exists (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$ with $p \in O$,

f は (O, U, u) 上 p のまわりで C^∞ 級

(関数 f の点 p における C^∞ 性は局所座標の取り方によらない. ただし $\mathcal{A}_0$ の中での)