Section 9 : 可微分多様体

意義 : 可微分多様体 および
その上の C^∞ 級関数を定義する.

Part II : 可微分多様体の定義, 各種構成

Section 7 : 局所座標系
8 : 座標変換
9 : 可微分多様体 ☆
10 : 正則部分多様体
11 : 射影空間
12 : C^∞ 級関数の構成

内容

- C^∞級関数，C^∞級写像の局所性
- 極大 C^∞ atlas
- 極大 C^∞-atlas 上の C^∞級関数
- C^∞級多様体の定義
  (可微分多様体)

Section 9.1 : C^∞級関数, C^∞級写像の局所性

1-マニフォールド空間の開集合上の関数, 写像について,
"C^∞性"が局所的な性質であることを見る.
(Section 9.3 の準備)

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$.

Prop 9.1.1：$U_0 \underset{\text{open}}{\subset} U$ とする.

制限

$\forall f \in C^\infty(U)$, $f|_{U_0} \in C^\infty(U_0)$

（実はこれまでもちょくちょく使っていた）

C^∞級関数の局所性

Prop 9.1.2 :

$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: U の開被覆

関数 $f : U \to \mathbb{R}$ について以下は同値

(i) $f \in C^\infty(U)$

$\Updownarrow$

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda,\ f|_{U_\lambda} \in C^\infty(U_\lambda)$

Hint : (ii) $\Rightarrow$ (i) について

Lemma 8.3.4 , 帰納法

Cor 9.1.3

$f \in \mathbb{R}^U$ (U上の$\mathbb{R}$値関数) について

以下は同値

(i) f は C^∞ 級関数 (i.e. $f \in C^\infty(U)$)

$\Updownarrow$

(ii)′ $\forall p \in U$, $\exists U_p \subset U$: pの開近傍 s.t.

$$f|_{U_p} \in C^\infty(U_p)$$

Hint : (ii)′ ⇒ (i) について

Uの開被覆 $\{U_p\}_{p \in U}$ について (ii) in Prop 9.1.2 が成り立つ

設定： $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i} \quad (i=1,2)$

Prop 10.1.4： $U_0 \underset{\text{open}}{\subset} U_1$ とする.

$\forall \varphi : U_1 \to U_2$: C^∞級写像,

$\varphi|_{U_0} : \underset{\substack{\cap \text{open} \\ \mathbb{R}^{n_1}}}{U_0} \to U_2$: C^∞級写像.

Hint： Prop 9.1.1 と以下の Lemma を用いる.

Lemma 9.1.5

$\forall f \in C(U_2)$, $\varphi^*(f)|_{U_0} = (\varphi|_{U_0})^*(f)$

C^∞級写像の局所性

Prop 9.1.6

$\{U_{1,\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ を U_1 の開被覆とする.

写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ について以下は同値.

(i) $\varphi : U_1 \to U_2$ は C^∞級写像

(φ は連続で, $\varphi^*(C^\infty(U_2)) \subset C^\infty(U_1)$)

$\Updownarrow$

(ii) 各 $\lambda \in \Lambda$ について $\varphi|_{U_{1,\lambda}} : U_{1,\lambda} \to U_2$ は C^∞級写像

Hint (ii) $\Rightarrow$ (i) について

Lemma 8.3.4, Prop 9.1.2, Lemma 9.1.5 を用いる.

Cor 9.1.7

写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ について以下は同値.

(i) $\varphi : U_1 \to U_2$ は C^∞級写像

$\Updownarrow$

(ii)$'$ $\forall p \in U_1$, $\exists U_{1,p} \subset U_1$: pの開近傍 s.t.

$$f|_{U_{1,p}} : U_{1,p} \to U_2 \text{ は } C^\infty \text{級写像}$$

Hint : (ii)$'$ $\Rightarrow$ (i) について

Uの開被覆 $\{U_p\}_{p \in U}$ について (ii) in Prop 9.1.3 が成り立つ

次の命題も使う

Prop 9.1.8 : $U_2' \underset{\text{open}}{\subset} U_2 \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$ とする.

写像 $\varphi : U_1 \to U_2'$ について以下は同値

(i) $\varphi : U_1 \to U_2'$ は C^∞ 級写像.

$\Updownarrow$

(ii) φ は U_1 から $U_2 \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$ への写像として C^∞ 級写像.

Hint : Prop 5.1.3, Prop 7.1.6 (1)

(定義から直接示すのは簡単でないので注意
cf. Prop 3.4.9)

Section 9.2 : 極大 C^∞-atlas

この節では 極大 C^∞-atlas を定義し、
("完全版"地図帳)
C^∞-atlas から構成する方法を述べる.

設定 : M : 位相空間
$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 :
$\mathcal{L}C(M;\mathbb{R}^n)$: M の n 次元局所座標系全体の集合

Recall (Def. 8.3.1):

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ が M の C^∞-atlas

地図帳

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ① $\bigcup_{(O,U,u)\in\mathcal{A}_0} O = M$ かつ

Mのすべての地点をカバー

② $\forall (O,U,u), \forall (O',V,v) \in \mathcal{A}_0$

座標変換 $\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$

$\cap$ open $\mathbb{R}^n$　　$\cap$ open $\mathbb{R}^n$

地図同士の整合性がとれている

は C^∞級写像

極大 C^∞-atlas を以下で定義する.

"完全版"

Def 9.2.1:

M の C^∞-atlas $\mathcal{A} \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$ が極大

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$ となる C^∞-atlas $\mathcal{B} \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$ が存在しない

Remark: $LC(M;\mathbb{R}^n)$ そのものは一般には C^∞-atlas になると限らない (なる場合の方が珍しい)

Q : C^∞-atlas A_0 について,

それを含む極大 C^∞-atlas は存在する?

A : Yes !!

しかもそのような極大 C^∞-atlas は一意.

任意の地図帳は地図を追加して"完全版"にできる.

Def. 9.2.2: M の C^∞-atlas $\mathcal{A}_0 \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$ について

$$[\mathcal{A}_0] := \left\{ (O, U, u) \in LC(M;\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^\forall (O', V, v) \in \mathcal{A}_0 \\ \text{座標変換 } \tau_{uv},\ \tau_{vu} \text{ は共に } C^\infty \text{級写像} \end{array} \right\}$$

$$\subset LC(M;\mathbb{R}^n)$$

$\mathcal{A}_0$ の地図と整合性のとれるすべての地図を追加

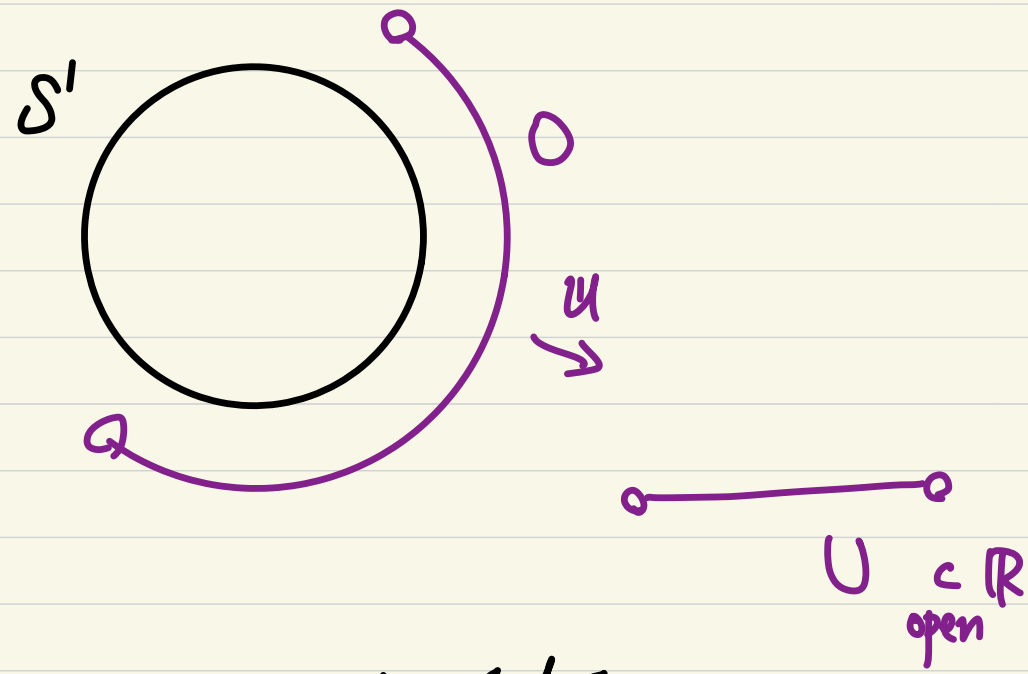
Ex 9.2.3: Ex 8.3.6 の $n=1$ の場合について.

$O = \{ x \in S^1 \mid x_1 > x_2 \}$

$U = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ open

$u : O \to U$

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$



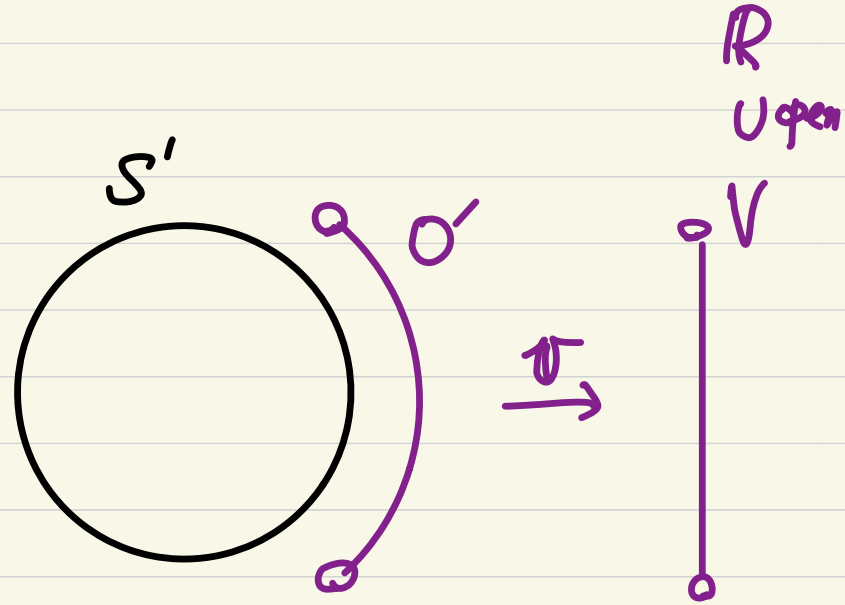
とすると $(O, U, u) \notin \mathcal{A}_0$ だが $(O, U, u) \in [\mathcal{A}_0]$

また:

$$O' := \{ x \in S^1 \mid x_1 > \tfrac{1}{\sqrt{2}} \}$$

$$V := \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$$

$$\psi : O' \to V, \quad x \mapsto x_2$$



とすると

$(O', V, \psi) \notin \mathcal{A}_0$ ただし $(O', V, \psi) \in [\mathcal{A}_0]$.

Theorem 9.2.4: $\mathcal{A}_0 \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$: M の C^∞-atlas とする.

このとき 以下が成り立つ

(1) $\mathcal{A}_0 \subset [\mathcal{A}_0]$

(2) $[\mathcal{A}_0]$ は M の極大 C^∞-atlas

(3) $\mathcal{A}_0$ を含む M の極大 C^∞-atlas は $[\mathcal{A}_0]$ のみ

これより

$[\mathcal{A}_0]$ を $\mathcal{A}_0$ の定める極大 C^∞-atlas と呼ぶ.

Idea of Proof of Thm 9.2.4:

(1) は 定義から従う (要確認)

(2) を示す:

示 ① $[A_0]$ は C^∞-atlas

② $[A_0]$ は C^∞-atlas として極大

① を示す：

示 ㋑ $\bigcup_{(O,U,u)\in[A_0]} O = M$

㋺ $[A_0]$ 内の座標変換は C^∞ 級

㋑ は (1) から従う（要確認）

㋺ を示す

示 $^\forall(O,U,u), {}^\forall(O',V,v) \in [A_0]$

$\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$

は C^∞ 級写像

$(O, U, u), (O', V, v) \in [A_0]$ を任意にとる.

示 $\tau_{uv} : \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n \text{ open}}}{u(O \cap O')} \to \underset{\substack{\cap \text{open} \\ \mathbb{R}^n}}{v(O \cap O')}$ は C^∞級写像

Cor 9.1.5 より 以下を示せばよい

示 $\forall p \in u(O \cap O')$, $\exists U_p \subset u(O \cap O')$: pの開近傍

s.t. $\tau_{uv}|_{U_p} : U_p \to v(O \cap O')$

は C^∞級写像

$p \in u(O \cap O')$ を任意にとる.

いま $\mathcal{A}_0$ は C^∞-atlas なので

$(O_0, U_0, u_0) \in \mathcal{A}_0$ であって $u^{-1}(p) \in O_0$

$\overset{\subset M}{O}$

$\cup$

となるものがとれる.

ここで $U_p = u(\underbrace{O \cap O' \cap O_0}_{p\text{の開近傍 in } M}) \underset{\text{open}}{\subset} U$ とおく.

示 $\tau_{uv}|_{U_p} : U_p \to v(O \cap O')$

は C^∞級写像

Prop 8.1.5 より U_p から $\psi(O \cap O' \cap O_0)$ への写像として

$$\tau_{\mathbb{U}\mathbb{V}}\Big|_{U_p} = \left(\tau_{\mathbb{U}_0\mathbb{V}}\Big|_{\mathbb{U}_0(O\cap O'\cap O_0)}\right) \circ \left(\tau_{\mathbb{U}\mathbb{U}_0}\Big|_{\mathbb{U}(O\cap O'\cap O_0)}\right)$$

[A_0] の定義より $\tau_{\mathbb{U}_0\mathbb{V}}$, $\tau_{\mathbb{U}\mathbb{U}_0}$ は C^∞級写像

それらの制限

$$\tau_{\mathbb{U}_0\mathbb{V}}\Big|_{\mathbb{U}_0(O\cap O'\cap O_0)}, \quad \tau_{\mathbb{U}\mathbb{U}_0}\Big|_{\mathbb{U}(O\cap O'\cap O_0)}$$

も C^∞級写像

(cf. Prop 9.1.4)

特に 合成 $\tau_{uv}|_{U_p} : U_p \to v(O \cap O' \cap O_0)$ も

C^∞ 級写像

(cf. Thm 6.1.1)

((ロ) 証明終) (① 証明終)

② は $[A_0]$ の定義と (1) から従う (要確認)

((2) 証明終)

(3) は「A_0 を含む C^∞-atlas」は $[A_0]$ に含まれる」

ことから従う (要確認) ∎

次の命題は便利

Prop 9.2.5 $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$ を

それぞれ M の C^∞-atlas とする.

以下は同値

(i) $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$

$\Updownarrow$

(ii) $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$, $\forall (O', V, v) \in \mathcal{B}_0$

τ_{uv}, τ_{vu} は共に C^∞ 級写像

Hint: Theorem 9.2.4

Ex 9.2.6

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし、

$$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とする。

$(O_N, V_N, \psi_N), (O_S, V_S, \psi_S) \in LS(S^n; \mathbb{R}^n)$

を以下のように定める。

$O_N := S^n \setminus \{(0,0,\cdots,0,1)\}$ $\quad$ $O_S := S^n \setminus \{(0,0,\cdots,0,-1)\}$

$V_N := \mathbb{R}^n$ $\quad$ $V_S := \mathbb{R}^n$

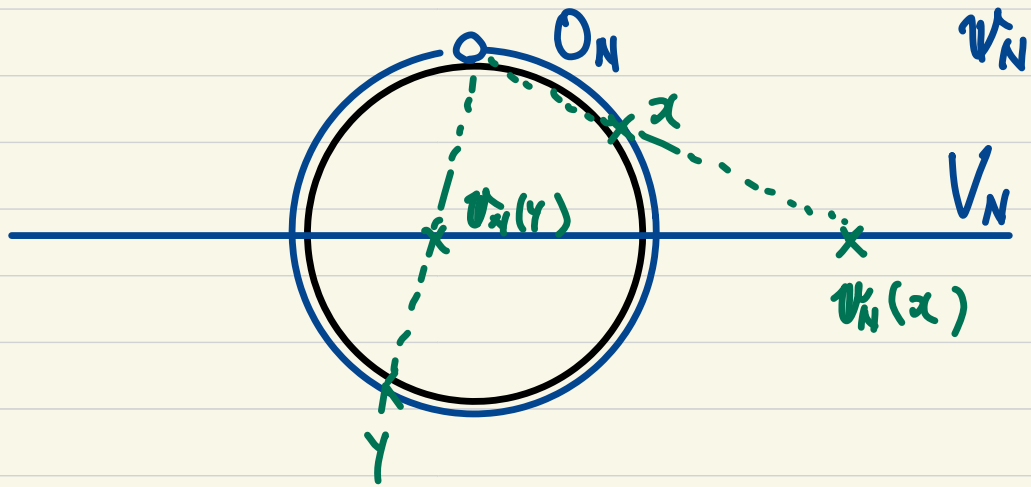
$\psi_N : O_N \to V_N$ $\quad$ $\psi_S : O_S \to V_S$

$$x \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \qquad x \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right)$$

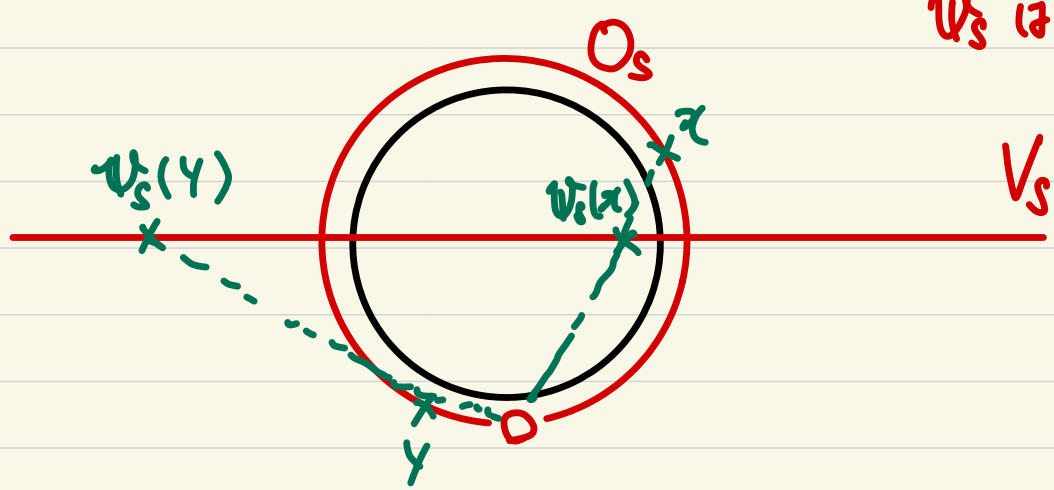
$$\left(\begin{array}{l} \psi_N^{-1} : V_N \to O_N \\ v \mapsto \left(\dfrac{2v_1}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2}, \cdots, \dfrac{2v_n}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2}, \dfrac{-1+\sum_{i=1}^n v_i^2}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2} \right) \end{array} \right)$$

ψ_S^{-1} は省略

イメージ　$n=1$ のとき



ψ_N は"北極点"における立体射影



ψ_S は"南極点"における立体射影

このとき

$$\mathcal{B}_0 := \{(O_N, V_N, \psi_N), (O_S, V_S, \psi_S)\}$$

は S^n の C^∞-atlas となる.

また

$$\mathcal{A}_0 := \{(O_k^\pm, U_k^\pm, \psi_k^\pm) \mid k = 1, \cdots, n+1\}$$

を Ex 8.3.6 で扱った

S^n の C^∞-atlas となる.

<u>Claim</u> : $[\mathcal{B}_0] = [\mathcal{A}_0]$

$\mathcal{B}_0$の完全版　$\mathcal{A}_0$の完全版

Idea of Proof

Prop 9.2.5 より 以下を示せばよい

示 $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$, $\forall (O', V, v) \in \mathcal{B}_0$

τ_{uv}, τ_{vu} は共に C^∞ 級写像

ここでは

$$(O, U, u) = (O_1^+, U_1^+, u_1^+)$$

$$(O', V, v) = (O_N, V_N, v_N)$$

の場合のみ紹介する.

このとき

$$O \cap O' = O_1^+ \cap O_N = \{x \in S^n \mid x_1 > 0,\ x \neq (0, 0, \cdots, 0, 1)\}$$

$$= \{x \in S^n \mid x_1 > 0\}$$

さらに $\mathcal{U}(O \cap O') = \mathcal{U}_1^+(\{x \in S^n \mid x_1 > 0\})$

$$= U_1^+ = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1\} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{V}(O \cap O') = \mathcal{V}_N(\{x \in S^n \mid x_1 > 0\})$$

$$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid v_1 > 0\} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

また:

$$\tau_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : \mathcal{U}(O \cap O') \to \mathcal{V}(O \cap O')$$

$$\mathcal{U}(O \cap O') = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1\}, \qquad \mathcal{V}(O \cap O') = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v_1 > 0\}$$

$$u \longmapsto \left(\frac{1 - \sum_{i=1}^n u_i^2}{1 - u_n}, \frac{u_1}{1 - u_n}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{1 - u_n} \right)$$

これは C^∞級写像

(定義域に注意)

$$\left((\mathcal{U}_1^+)^{-1} \quad (1 - \sum_{i=1}^n u_i^2, u_1, \cdots, u_n) \quad \mathcal{V}_N \right)$$

$$\tau_{vu} : v(O \cap O') \to u(O \cap O')$$

$$v(O \cap O') = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v_1 > 0 \}, \qquad u(O \cap O') = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \}$$

これは C^∞ 級写像

$$v \longmapsto \left(\frac{2v_2}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \cdots, \frac{2v_n}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \frac{-1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} v_N^{-1} \nwarrow & & \nearrow u_1^{+} \\ \left(\frac{2v_1}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \cdots, \frac{2v_n}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}, \frac{-1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{1+\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \right) & & \end{array} \right)$$

他の場合もがんばって計算すると

座標変換がいずれも C^∞ 級写像

であることが分かる. 図

Section 9.3 極大 C^∞-atlas 上の C^∞ 級関数

設定：M：位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\mathcal{A}_0 \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$：$M$ の C^∞-atlas

記号：$[\mathcal{A}_0]$：$\mathcal{A}_0$ の定める M の極大 C^∞-atlas

(cf. Thm 9.2.4)

Recall (Def. 8.3.2):

$f \in C(M)$ が $[\mathcal{A}_0]$ 上 C^∞級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (O, U, u) \in [\mathcal{A}_0]$, $f_u \in C^\infty(U)$

Q: $[\mathcal{A}_0]$ はものすごく大きい集合なので check が大変なのでは…

完全版

A: $\mathcal{A}_0$ だけ気にすれば OK!

オリジナル

Theorem 9.3.1: $f \in C(M)$ について以下は同値

(i) f は A_0 上 C^∞ 級

$\Updownarrow$

(ii) f は $[A_0]$ 上 C^∞ 級

特に $C^\infty(M; A_0) = C^\infty(M; [A_0])$

Proof: (ii) $\Rightarrow$ (i) は Thm 9.2.4 から従う.

(i) $\Rightarrow$ (ii) を示す.

(i) を仮定して (ii) を示す.

示. $\forall (O, U, u) \in [A_0]$, $f_u \in C^\infty(U)$

$(O, U, u) \in [A_0]$ を任意にとる.

示 $f_u \in C^\infty(U)$

Cor 9.1.3 より 以下を示せば良い

示 $\forall p \in U, \exists U_p \subset U$: p の開近傍 s.t.

$f_u|_{U_p} \in C^\infty(U_p)$

$p \in U$ を任意にとる.

示 $\exists U_p \subset U$: p の開近傍

s.t $f_u|_{U_p} \in C^\infty(U_p)$

$u^{-1}(p) \in O'$ となる $(O', V, v) \in \mathcal{A}_0$ を固定

$\cap$

O

$\cap$

M

($\mathcal{A}_0$ は M の C^∞-atlas なのでこのような $(O', V, v) \in \mathcal{A}_0$ は存在する)

$U_p = u(O \cap O') \subset U$ とおくと

U_p は p の開近傍 in U.

示 $f_u|_{U_p} \in C^\infty(U_p) = C^\infty(u(O \cap O'))$

$\shortparallel$

$f_u|_{u(O \cap O')}$

$[A_0]$ の定義と Thm 8.2.2 と Lemma 8.2.3 より以下を示せば十分

(示) $f_{\psi}|_{\psi(O\cap O')} \in C^{\infty}(\psi(O\cap O'))$

いま f は A_0 上 C^{∞} 級なので

$$f_{\psi} \in C^{\infty}(V)$$

特に Prop 9.1.1 より

$$f_{\psi}|_{\psi(O\cap O')} \in C^{\infty}(\psi(O\cap O'))$$

$\blacksquare$

C^∞性のチェックに便利な命題

Prop. 9.3.2: $\mathcal{A}$ を M の極大 C^∞-atlas とする.

関数 $f : M \to \mathbb{R}$ について以下は同値

(i) $f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$

(ii) $\forall p \in M$, $\exists (O, U, u) \in \mathcal{A}$, $\exists O_p \subset O$: pの開近傍

s.t. $f_u|_{u(O_p)} \in C^\infty(\underbrace{u(O_p)}_{\subset \text{open } \mathbb{R}^n})$

Hint: $\mathcal{A}_0 := \{(O_p, u(O_p), u|_{O_p}) \mid p \in M\}$ とおくと

$\mathcal{A}_0 \subset LC(M; \mathbb{R}^n)$ かつ $[\mathcal{A}_0] = \mathcal{A}$

Section 9.4 : C^∞級多様体の定義

Def. 9.4.1 : Mを位相空間,
$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$とする.
$\mathcal{A}$をMの極大C^∞-atlasとする.

可微分多様体,
滑らかな多様体
ともよぶ

組$(M, \mathcal{A})$がn次元C^∞級多様体であるとは

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ① Mはハウスドルフ

C^∞級関数が豊富に存在することを保障
(cf. Section 11)

かつ

② Mは第二可算公理を満たす
(i.e. 可算開基を持つ)

積分論に必要
(cf. 幾何学D)

← ハウスドルフ, 第二可算

Ex 9.4.2

$\mathbb{R}^n$ の開集合 U について

$(U, U, \mathrm{id}_U) \in LC(U; \mathbb{R}^n)$ (Ex 7.2.2)

$\mathcal{A}_0 := \{(U, U, \mathrm{id}_U)\}$ は U の C^∞-atlas.

$[\mathcal{A}_0]$ を $\mathcal{A}_0$ の定める極大 C^∞-atlas とする.

このとき $(U, [\mathcal{A}_0])$ は n 次元 C^∞ 級多様体.

また $C^\infty(U; [\mathcal{A}_0]) = C^\infty(U)$.

← Section 3 で定義したもの

(面白くない例)

Ex 9.4.3

← ハウスドルフ, 第二可算

$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ について

$\mathcal{A}_0 := \{ (O_k^{\pm}, U_k^{\pm}, \mathbb{U}_k^{\pm}) \mid k = 1, \cdots, n+1 \}$

を Ex 8.3.6 で扱った S^n の C^∞-atlas とする.

$[\mathcal{A}_0]$ を $\mathcal{A}_0$ の定める極大 C^∞-atlas とする. ← Ex 9.2.6 の $\mathcal{B}_0$ から作っても同じものができる.

このとき $(S^n, [\mathcal{A}_0])$ は n 次元 C^∞ 級多様体.

$[\mathcal{A}_0]$ を決めたおかげで $C^\infty(S^n; [\mathcal{A}_0])$ が定義できる!

これからやる事

- C^∞級多様体の例の紹介
- $C^\infty(M;A)$を調べる。

Part II

- 接空間，接ベクトル。
- C^∞級写像，写像の微分
- ベクトル場，微分方程式
- 部分多様体

Part IV

Section 9.4 終