Section 10：射影空間

意義：多様体の例として射影空間を紹介

Part II：可微分多様体の定義，各種構成

Section 7：局所座標系

8：座標変換

9：可微分多様体

10：射影空間 ☆

内容

- 射影空間の定義
- 射影空間の多様体構造

Section 10.1 : 射影空間の定義

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 10.1.1 :

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ における同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ s.t. } y = \lambda x$$

として定める.

Def 10.1.2 :

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の $\sim$ による商空間を

(i.e. 商集合に商位相を定めたもの)

$$P(\mathbb{R}^{n+1}) := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

と書き，n 次元射影空間とよぶ．

$\mathbb{R}P^n$ とも書く

@ $P(\mathbb{R}^{n+1})$ はユークリッド空間の部分集合とは考えない．

Recall : $(X, \mathcal{O})$: 位相空間

$\sim$: X 上の同値関係

$\pi : X \to X/\sim$: 商写像 について

$\pi_* \mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X/\sim)$ を

$$\pi_* \mathcal{O} := \{ U \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O} \}$$

と定めると $X/\sim$ の位相となる.

これを商位相と呼ぶ.

Prop 10.1.3:

$P(\mathbb{R}^{n+1})$ は コンパクト ハウスドルフもつ 第二可算公理 を満たす.

この命題は自明ではない.

Hint となる命題を Section 10.3 にいくつか挙げておく.

(試験範囲外)

記号：各 $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について

$[x] := \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}^\times\} \in P(\mathbb{R}^{n+1})$ とおく.

x の同値類

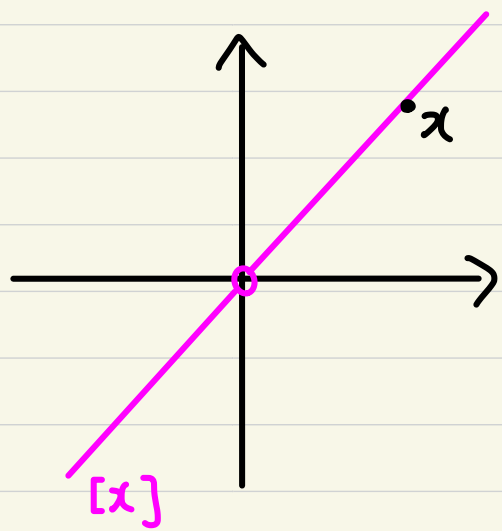
$[x] = [(x_1, \cdots, x_n)]$ を $[x_1 : x_2 : \cdots : x_n]$ とも書く.

$\in P(\mathbb{R}^{n+1})$

$[x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}] = [y_1 : y_2 : \cdots : y_{n+1}]$

$\Longleftrightarrow {}^\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times$ s.t. $\lambda x_1 = y_1, \cdots, \lambda x_{n+1} = y_{n+1}$

に注意



Prop 10.1.4

$$P(\mathbb{R}^{n+1}) \to \{\mathbb{R}^{n+1}\text{の1次元部分空間}\}$$

$$[x] \mapsto [x] \cup \{0\}$$

は全単射

Remark:

集合 $\{\mathbb{R}^{n+1}\text{の1次元部分空間}\}$ に自然な位相を入れたものが $P(\mathbb{R}^{n+1})$ であると思ってよい.

Section 10.1 終

Section 10.2：射影空間の多様体構造

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号：

$LC(P(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{R}^n)$：

$P(\mathbb{R}^{n+1})$のn次元局所座標系全体の集合

Ex 10.2.1 : 各 $i = 1, \cdots, n+1$ について

$$O_i := \{ [x] \in P(\mathbb{R}^{n+1}) \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},\ x_i \neq 0 \}$$

$$U_i := \mathbb{R}^n$$

← x_i をスキップする.

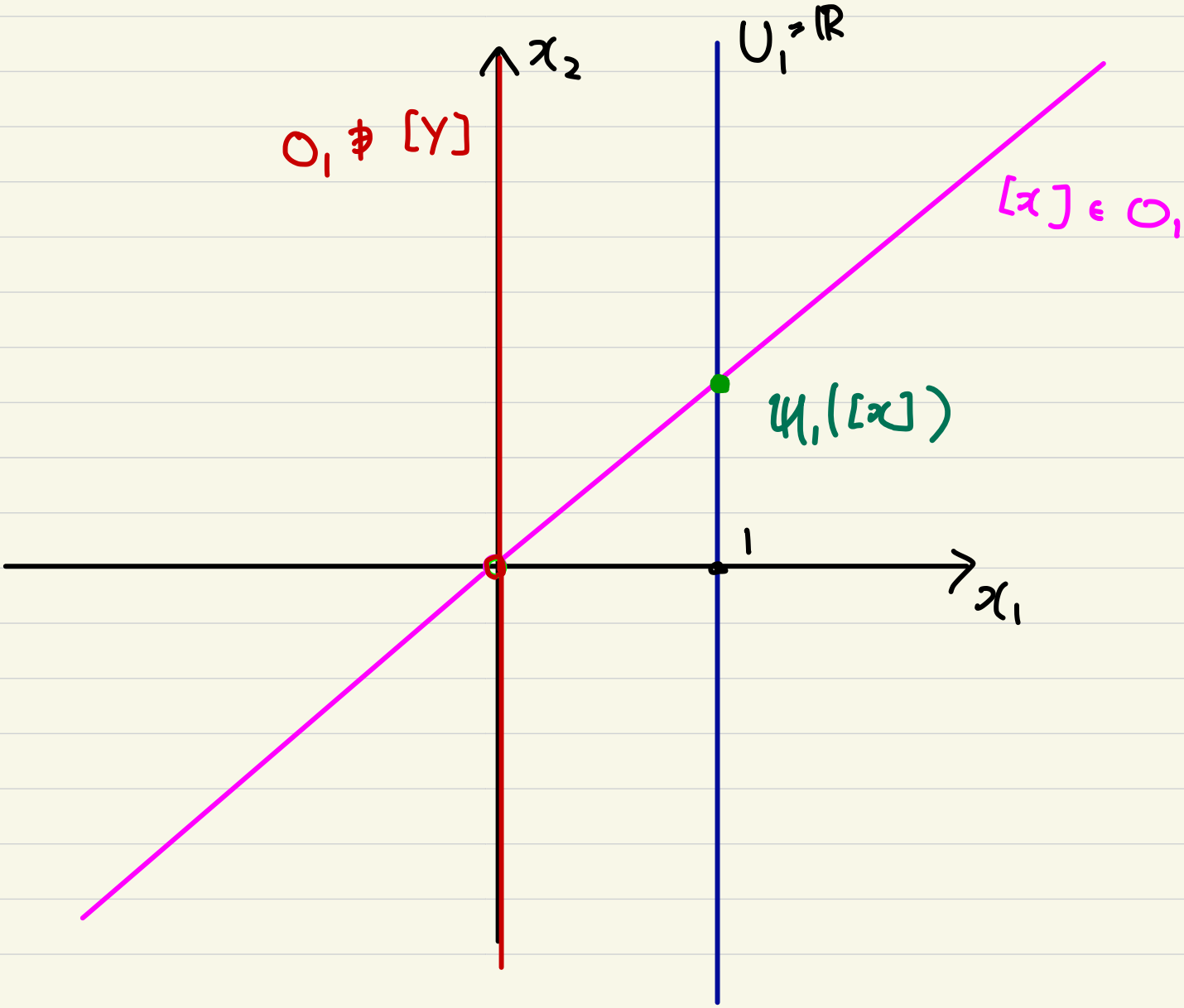
$$u_i : O_i \to U_i,\ [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \cdots \overset{x_i}{\vee} \cdots, x_{n+1})$$

$$= \frac{1}{x_i}(x_1, \cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$$

とおくと $(O_i, U_i, u_i) \in LC(P(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{R}^n)$.

(Hint: $(u_i)^{-1} : U_i \to O_i,\ u = (u_1, \cdots u_n) \mapsto [u_1 : \cdots u_{i-1} : 1 : u_i : \cdots : u_n]$)

$n=1$ の場合のイメージ



Prop 10.2.2

$\mathcal{A}_0 := \{ (O_i, U_i, u_i) \mid i = 1, \cdots, n+1 \}$

は $P(\mathbb{R}^{n+1})$ の C^∞-atlas

特に $(P(\mathbb{R}^{n+1}), [\mathcal{A}_0])$ は n 次元 C^∞ 級多様体

Proof

示 ① $\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i = P(\mathbb{R}^{n+1})$

② $\mathcal{A}_0$ 内の座標変換は C^∞ 級写像

① について

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i \subset P(\mathbb{R}^{n+1})$$ は定義より明らか.

示 $$\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i \supset P(\mathbb{R}^{n+1})$$ i.e. $\forall \omega \in P(\mathbb{R}^{n+1}), \exists i = 1, \cdots, n+1$ s.t. $\omega \in O_i$

$P(\mathbb{R}^{n+1})$ の元 ω を任意にとる.

$P(\mathbb{R}^{n+1})$ の定義より $\exists x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ s.t. $\omega = [x]$.

この x について $x \neq 0$ より $x_i \neq 0$ となる $i = 1, \cdots, n+1$ が存在する.

この i について $[x] \in O_i$

① 証明終

② について

$1 \leq i \lneq j \leq n+1$ とする.

(O_i, U_i, x_i) から (O_j, U_j, x_j) への座標変換を簡単のため

$$\tau_{ij} : x_i(O_i \cap O_j) \to x_j(O_i \cap O_j) \quad \text{と書く.}$$

$$x_i(O_i \cap O_j) = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid u_{j-1} \neq 0 \}, \qquad x_j(O_i \cap O_j) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v_i \neq 0 \}$$

$$u \xmapsto[\tau_{ij}]{} \frac{1}{u_{j-1}} (u_1, \cdots, u_{i-1}, 1, u_i, \cdots, u_{j-2}, u_j, \cdots, u_n)$$

τ_{ij} は C^∞-級

(ほぼ同様に τ_{ji} も C^∞-級)

② 証明終

$\boxtimes$

Ex 10.2.3 :

$$f : P(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}, \quad [x] \mapsto \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

とおく.

Claim : f は well-defined で

$$f \in C^\infty(P(\mathbb{R}^3); [A_0])$$

Well-defined 性 : Check 項目

① $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \neq 0$

② $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ with $x \sim y$,

$$\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{2y_1y_2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$$

詳細略

C^∞性：Thm 9.2.1 より以下を示せば十分

示 $f \in C^\infty(P(\mathbb{R}^3); \mathcal{A}_0)$

i.e. $\forall i = 1, 2, 3$, $f_{u_i} \in C^\infty(U_i)$

$i=1$ について $f_{u_1} : \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\shortparallel}{U_1}} \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \dfrac{2u_1}{u_1^2 + u_2^2 + 1}$

$i=2$ について $f_{u_2} : \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\shortparallel}{U_2}} \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \dfrac{2u_1}{u_1^2 + u_2^2 + 1}$

$i=3$ について $f_{u_3} : \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\shortparallel}{U_3}} \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \dfrac{2u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2 + 1}$

いずれも C^∞級.

Section 10.2 終

Section 10.3: Prop 10.1.3 について

試験範囲外

Prop 10.1.3 (再掲)

$P(\mathbb{R}^{n+1})$ は コンパクト ハウスドルフ もつ 第二可算公理 を満たす.

Hint となる命題をいくつか挙げておく.

Prop 10.3.1:

商写像 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P(\mathbb{R}^{n+1})$ は開写像

Prop 10.3.2:

X を位相空間とし，$\sim$ を X 上の同値関係とする．

また商写像 $\pi : X \to X/\sim$ が開写像であるとする．

このとき以下の条件は同値

(i) $\{(x,y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ が $X \times X$ 内の閉集合

(ii) $X/\sim$ はハウスドルフ．

Prop 10.3.3:

X を位相空間とし，$\sim$ を X 上の同値関係とする．

また商写像 $\pi : X \to X/\sim$ が開写像であるとする．

このとき X が第二可算公理を満たすなら，

$X/\sim$ も第二可算公理を満たす．