Section 11：閉部分多様体と C^∞ 級関数の延長

やる事："多様体の閉集合は多様体"を正当化する

また"C^∞ 級関数の延長定理"を紹介する．

Section 11.1：開部分多様体

設定：$n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$(M, \mathcal{A})$：n 次元 C^∞ 級多様体

$\Omega \subset M$：open

Thm 11.1.1 :

$\mathcal{A}(\Omega) := \{ (O, U, u) \in \mathcal{A} \mid O \subset \Omega \}$

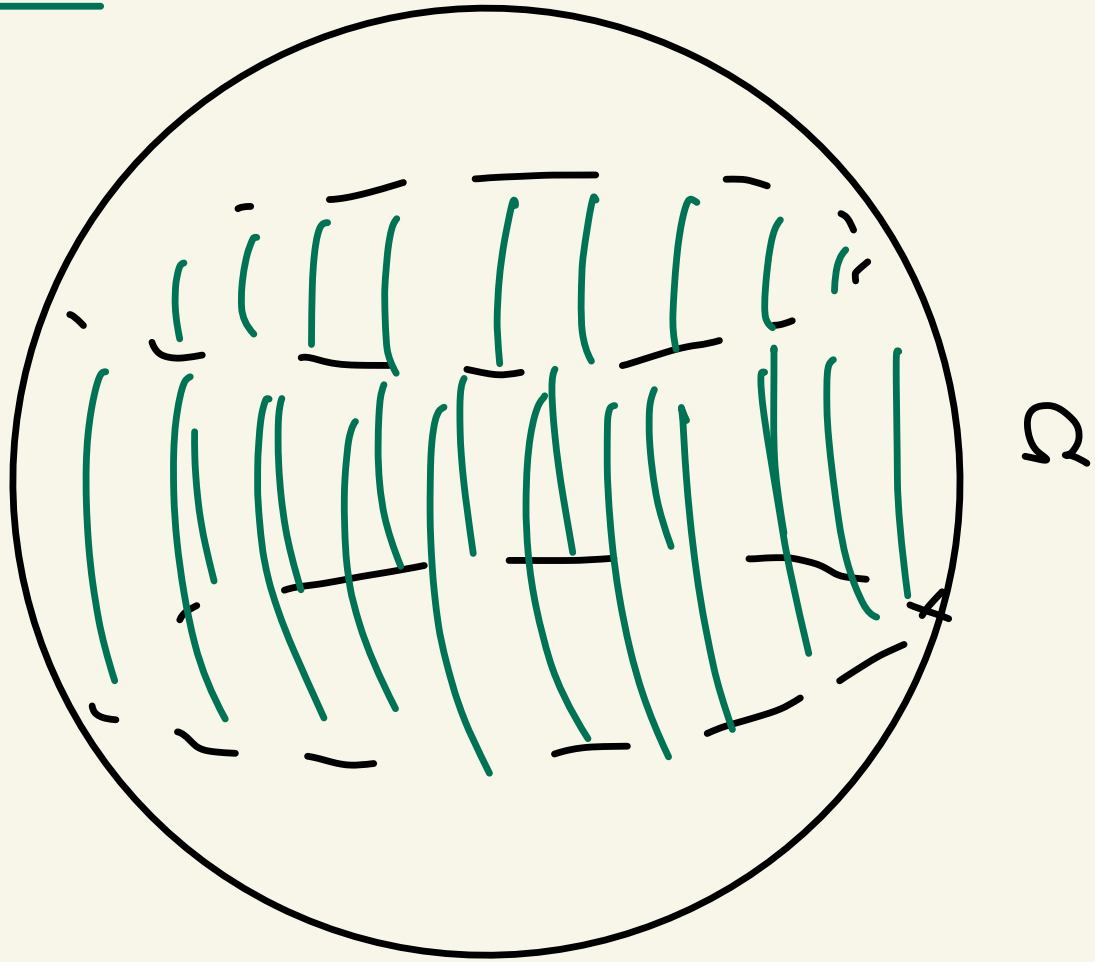
は Ω 上の極大 C^∞-atlas

特に $(\Omega, \mathcal{A}(\Omega))$ は n 次元 C^∞ 級多様体

開部分多様体

Ex 11.1.2:

$M = S^2$



Section 11.2: C^∞級関数の延長

設定: $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$(M, \mathcal{A})$: n次元 C^∞級多様体

$\Omega \subset M$: open

記号:

$(\Omega, \mathcal{A}(\Omega))$: 開部分多様体

Prop 11.2.1 :

$$\gamma : C^\infty(M;\mathcal{A}) \to C^\infty(\Omega;\mathcal{A}(\Omega))$$
$$f \mapsto f|_\Omega$$

は well-defined で $\mathbb{R}$代数準同型.

証 $\forall f \in C^\infty(M;\mathcal{A})$, $f|_\Omega \in C^\infty(\Omega;\mathcal{A}(\Omega))$

Remark:

$\gamma : C^\infty(M; \mathcal{A}) \to C^\infty(\Omega; \mathcal{A}(\Omega))$

は全射とも単射とも限らない

Hint: 全射性の反例: $M = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

単射性の反例: $M = \mathbb{R}$, $\Omega = (-\infty, 0)$

(cf. Prop 3.4.9)

Thm 11.2.2 (C^∞級関数の延長定理)

$p \in \Omega$, $h \in C^\infty(\Omega; A(\Omega))$ を fix.

このとき $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M; A)$ s.t.

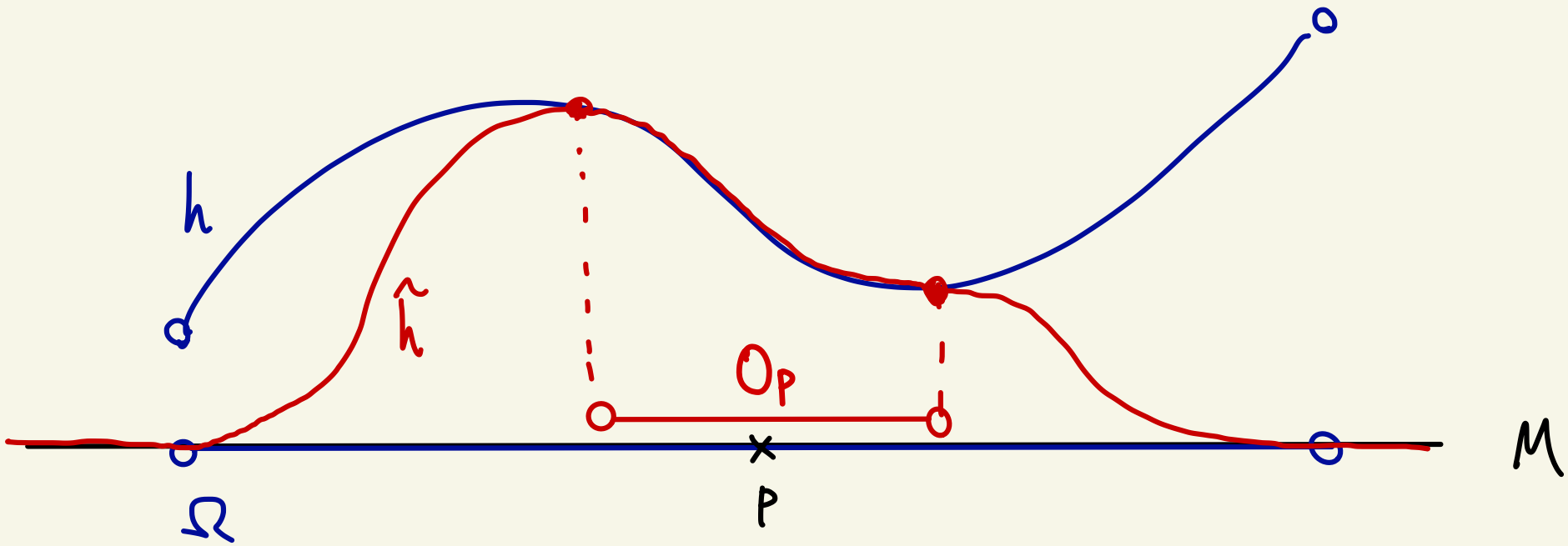
$\tilde{h}|_\Omega$ と h は p のまわりで一致する.

(i.e. $\exists O_p$: p の開近傍 in Ω

s.t. $\tilde{h}|_{O_p} = h|_{O_p}$)

気持ち: $r : C^\infty(M; A) \to C^\infty(\Omega; A(\Omega))$ は"局所的"には全射!

イメージ



Thm 11.2.2 の証明について：

キーポイント："M がハウスドルフ" を本質的に用いる．

詳細は Section 11.3（試験範囲外）

Section 11.3 : Thm 11.2.2 の証明

試験範囲外

Thm 11.2.2 (C^∞ 級関数の延長定理 : 再掲)

$p \in \Omega$, $h \in C^\infty(\Omega ; A(\Omega))$ を fix.

このとき $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M ; A)$ s.t.

$\tilde{h}|_\Omega$ と h は p のまわりで一致する.

(i.e. $\exists O_p$: p の開近傍 in Ω

s.t. $\tilde{h}|_{O_p} = h|_{O_p}$)

Section 3.4 を勉強した人向けの remark

$C_p^\infty(M;A)$, $C_p^\infty(\Omega;A(\Omega))$ を

$C^\infty(M;A)$, $C^\infty(\Omega;A(\Omega))$ の p における

stalk とする.

(各自定義せよ)

Thm 11.2.2 から従う

Theorem 11.3.1

$C_p^\infty(M;A) \twoheadrightarrow C_p^\infty(\Omega;A_\Omega)$, $[f]_p \mapsto [f|_\Omega]_p$

は well-defined かつ全単射

Thm 11.2.2 の証明の準備

Prop 11.3.1

$(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ とし、

$r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ が

$\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - \mathbf{u}(p)\| \leq r_0\} \subset U$ を満たすとする。

このとき $\mathbf{u}^{-1}(\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - \mathbf{u}(p)\| \leq r_0\}) \subset O \subset M$

はコンパクト

特に M の閉集合

"M はハウスドルフ" が重要

Proof of Thm 11.2.2 :

$h \in C^\infty(\Omega ; A(\Omega))$ を任意にとる.

示 $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M ; A)$, $\exists O_p$: p の開近傍 in Ω

s.t. $\tilde{h}|_{O_p} = h|_{O_p}$

$(O, U, u) \in A$ with $p \in O \subset \Omega$ をとる.

$r \in \mathbb{R}_{>0}$ を $\{ u \in U \mid \| u - u(p) \| < r \} \subset U$

となるようにとる.

$$O_p := \varphi^{-1}\left(\left\{u \in U \mid \|u-\varphi(p)\| < \frac{1}{3}r\right\}\right) \subset \Omega$$

とおくと O_p は p の開近傍 in Ω

示 $\exists\, \tilde{h} \in C^\infty(M; A)$ s.t. $\tilde{h}|_{O_p} = h|_{O_p}$

C^∞級関数 $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって

以下を満たすものをとる

(Thm 3.2.6 よりそのような b は存在する)

(i) $b(u) = 1$ if $\|u-\varphi(p)\| \leq \frac{1}{3}r$

(ii) $b(u) = 0$ if $\|u-\varphi(p)\| \geq \frac{2}{3}r$

$(u \in \mathbb{R}^n)$

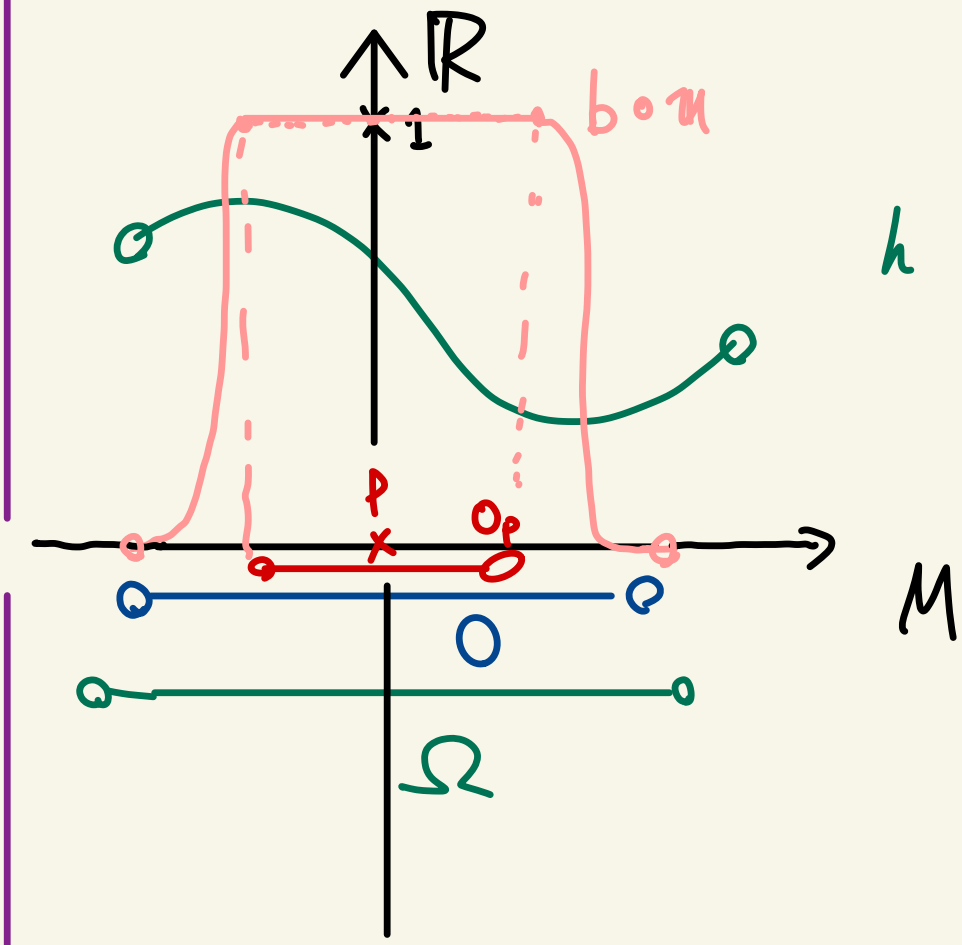
ここで $\tilde{h} : M \to \mathbb{R}$

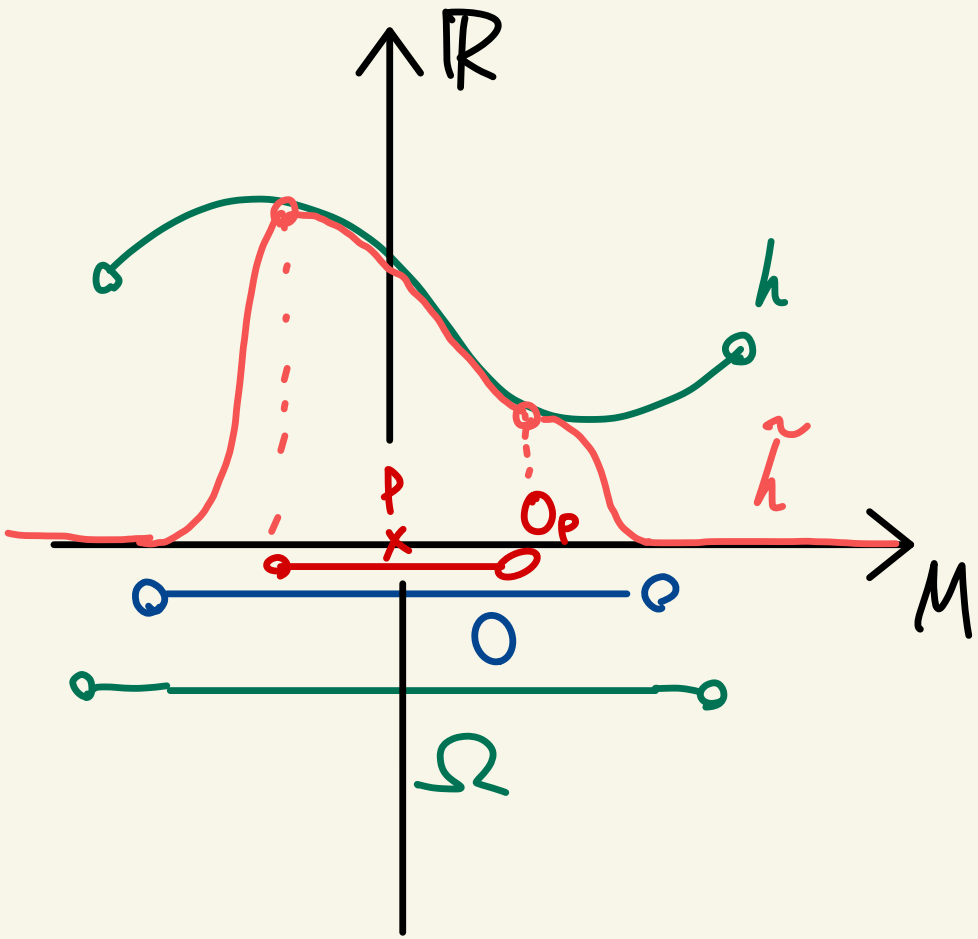
$$x \longmapsto \begin{cases} h(x) \cdot b(u(x)) & (\text{if } x \in O) \\ 0 & (\text{if } x \notin O) \end{cases}$$

とおく.

定義より明らかに $\tilde{h}|_{O_p} = h|_{O_p}$.

イメージ





示 $\tilde{h} \in C^\infty(M; A)$

i.e. $\forall q \in M$, $\tilde{h}$ は A 上 q のまわりで C^∞ 級

(cf. Section 8.4)

$q \in M$ を任意にとる.

示 $\tilde{h}$ は A 上 q のまわりで C^∞ 級

いま Prop 11.3.1 より

$$K := \mathrm{m}^{-1}(\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - \mathrm{m}(p)\| \leq \tfrac{2}{3}r\}) \subset O \subset M$$

はコンパクト.

特に K は closed in M （∵ M はハウスドルフ）

$K \subset O$ より 以下を示せば十分

示 Case 1 : $q \in O$ のとき $\tilde{h}$ は A 上 q のまわりで C^∞ 級

Case 2 : $q \in M \setminus K$ のとき $\tilde{h}$ は A 上 q のまわりで C^∞ 級

Case 1 : $q \in O$ のとき

Thm 8.4.4 より
以下を示せば十分 示 $\tilde{h}_m \in C^\infty(U)$

定義より $\tilde{h}_m = h_m \cdot (b|_U)$

$h_m \in C^\infty(U)$ かつ $b|_U \in C^\infty(U)$

より $\tilde{h}_m \in C^\infty(U)$

Case 2 : $q \in M \setminus K$ のとき

示 $\tilde{h}$ は $\mathcal{A}$ 上 q のまわりで C^∞ 級

$\forall (O', V, \psi) \in \mathcal{A}$ with $q \in O'$ をとる.

示 $\tilde{h}_\psi$ は $\psi(q)$ のまわりで C^∞ 級

$\underset{\text{closed}}{K \subset M}$ より $q \in \underset{\text{open}}{O' \setminus K \subset M}$ に注意.

$\tilde{h}$ の定義から $\tilde{h}|_{O' \setminus K} \equiv 0$.

特に $\tilde{h}_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{U}(O' \setminus K)$ 上で恒等的にゼロ.

$\mathcal{U}(p)$ の開近傍 in V

特に $\tilde{h}_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{U}(p)$ のまわりで C^∞ 級 ∎