

Section 12: 接ベクトルと接空間

やる事: 多様体上で 接ベクトル, 接空間 の
概念を定義する.

Section 12.1 : 接点と接空間

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(M, A) : n -次元 C^n 級多様体

$p \in M$.

Def 12.1.1 :

$$\underline{T_p M} := \{ \eta \in L(C^\infty(M; A), \mathbb{R}) \mid$$

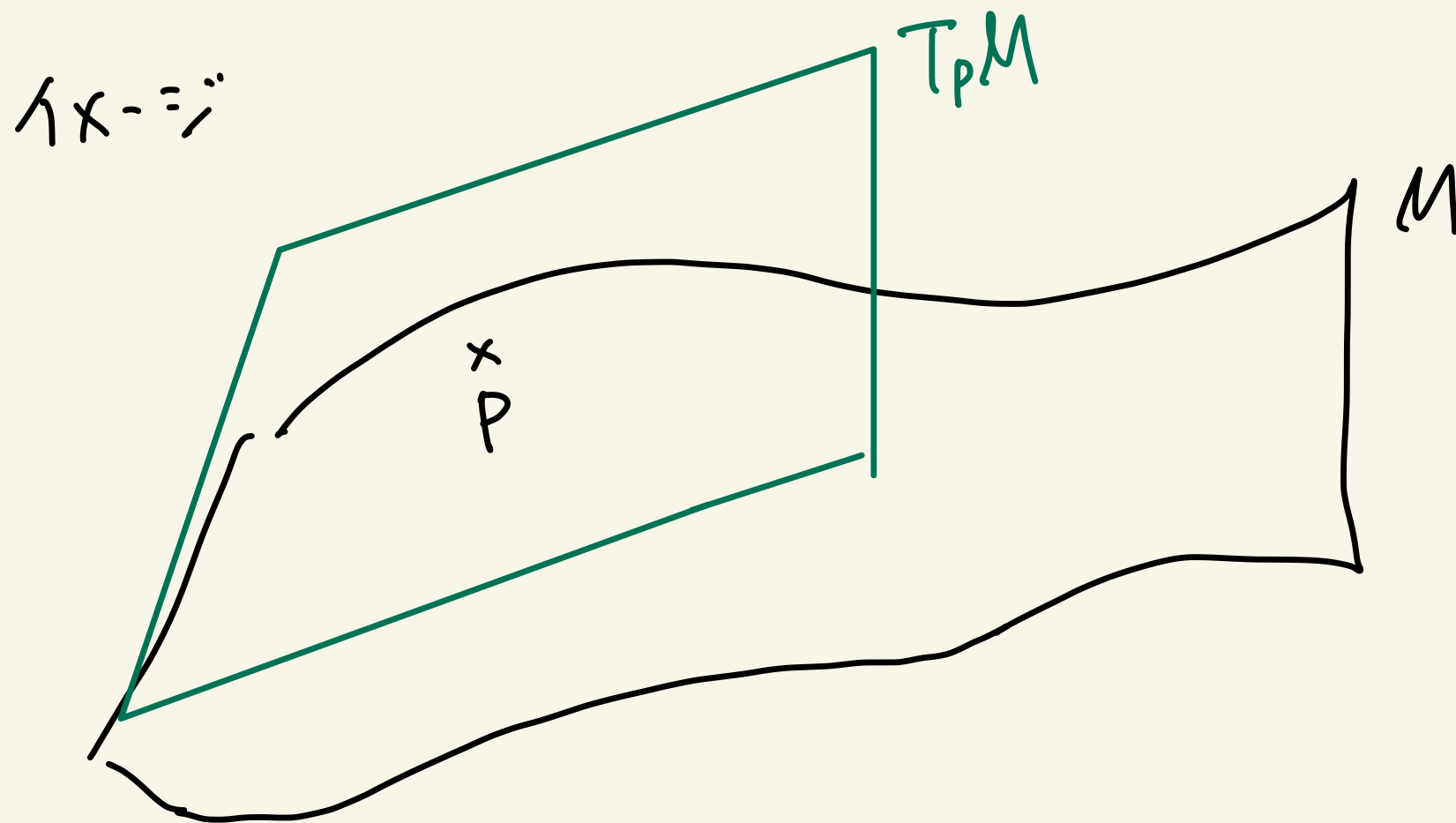
$$\eta(f \cdot g) = \eta(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \eta(g)$$

$$\left. \begin{array}{c} \text{for any } f, g \in C^\infty(M; A) \end{array} \right\}$$

$p \in M$ に対する
 M の接空間

$p \in M$ に対して ライプニッツ則

- $T_p M$ の元を $p \in M$ に対する M の接ベクトルという.



つまり “ $M \subset \mathbb{R}^N$ ” という訳ではない！

Prop 12.1.2 : $T_p M$ is $L(C^\infty(M; A), \mathbb{R})$ a

線型部分空間 .

(Prop 4.3.1 a 對稱版本)

追加スライド: 試験範囲外

Thm 12.1.3 (接ベクトルの局所性):

$\gamma \in T_p M$ と可.

$f_1, f_2 \in C^\infty(M; A)$ かつ p の周りで一致可と可.

このとき $\gamma(f_1) = \gamma(f_2)$

証明は Section 12.4

Section 12.2 : 座標基底

設定: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(M, A) : n -次元 C^∞ 級多様体

$p \in M$.

$(O, U, u) \in A$ with $p \in O$

Def 12.2.1: $\forall i=1, \dots, n$ $1 \leq n$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p : C^\infty(M; A) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{u(p)}(f_u)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_u(u(p) + h e_i) - f_u(u(p))}{h}$$

$$(\exists \varepsilon > 0 \quad e_1, \dots, e_n \text{ is } \mathbb{R}^n \text{ a}$$

標準基底)

$\varepsilon \delta < \varepsilon$.

Prop 12.2.2 :

$\forall i = 1, \dots, n \quad u_i \in \mathcal{U}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_p \in T_p M$$

Hint : • $C^\infty(M; A) \rightarrow C^\infty(U)$ is $\mathbb{R}$ -linear isomorphism

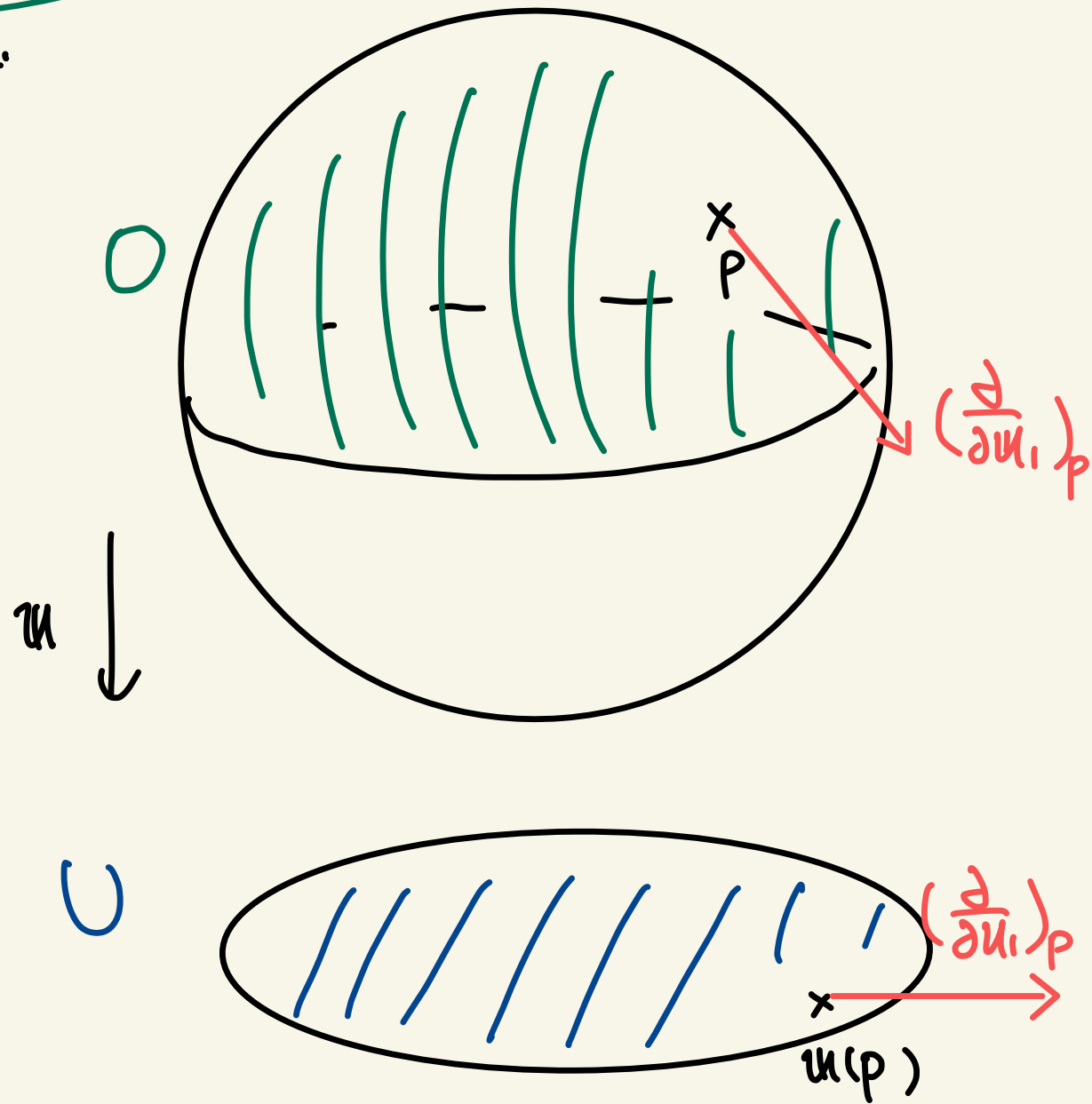
$$f \mapsto f_u$$

• $\left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_{u(p)} : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ is $T_p U$ a $\mathbb{R}$

(cf. Section 4)

追加スライド

イメージ



Thm 12.2.3 :

$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n} \right)_p$ は $T_p M$ の基底

$\leftarrow (0, 0, u) \rightarrow$ について

$T_p M$ の標準基底

Cor 12.2.4. $T_p M$ は有限次元で,

$$\dim T_p M = n$$

追加スライド

Thm 12.2.3 は別の番号として

$$\phi_u: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M, \quad v \mapsto \phi_u(v) : C^\infty(M; A) \rightarrow \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^n$ 線型同型

$$f \mapsto \underbrace{v_{u(p)}}_{\text{Section 4 の}}(f_u)$$

Section 4 の
方向微分

Thm 4.3.5 a の記述の版

とこの意味になる。

証明には Thm 11.2.2 (C^∞ 級関数の延長定理) を用いた

詳細は Section 12.4 試験範囲外

Section 12.3 : 座標變換 & 座標基底

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(M, A) : n -次元 C^∞ 級多様体

$p \in M$.

(O, U, u)
 $(O', V, v) \in A$ with $p \in O \cap O'$

記号 : T_{uv} : u 与 v への座標変換
(cf. Section 8)

記号 : $(\frac{\partial}{\partial u_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial u_n})_p \in T_p M$

(O, U, u) は $T_p M$ の座標基底

$(\frac{\partial}{\partial v_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial v_n})_p \in T_p M$

(O', V, v) は $T_p M$ の座標基底

Thm 12.3.1

ヤコビ行列 $(J\tau_{uv})_{u(p)}$ (cf. Def 5.3.1) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial v_n}\right)_p \in T_p M$$

$p \in \bar{S}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p \in T_p M$$

の基底の変換行列

$$\text{i.e.} \quad \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_{j=1}^n ((J\tau_{uv})_{u(p)})_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\right)_p$$

$$(i=1, \dots, n)$$

図式

$$\begin{array}{ccc}
 & T_p M & \\
 \nearrow ((\frac{\partial}{\partial u_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial u_n})_p) & & \nwarrow ((\frac{\partial}{\partial v_1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial v_n})_p) \\
 & \mathbb{Q} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n \\
 & (J\tau_{uv})_{u(p)} &
 \end{array}$$

Thm 12.3.1 の証明の Hint : Thm 5.3.2

詳細は Section 12.5 試験範囲外

Ex 12.3.2:

$(S^n, [A_0]) \in \text{Ex 9.3.3}$ a $\notin$ a $\in \mathbb{Q}$.

$n = 2 \in \mathbb{N}$, $p = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in S^2 \in \mathbb{R}^3$.

$(O, U, u) := (O_3^+, U_3^+, u_3^+) \in A_0 \in \mathbb{Q}$.

$(O, V, v) := (O_2^+, U_2^+, u_2^+)$
(Ex 9.3.6)

$\in \mathbb{Q}$ $T_{uv} : u(O \cap O') \rightarrow v(O \cap O')$
" " "

$\{u \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^2 u_i^2 < 1, u_2 > 0\}$ $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^2 v_i^2 < 1, v_2 > 0\}$
" " "
 $u \mapsto (u_1, \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2})$

(cf. Ex 9.1.2)

$$u(p) = u_3^+(p) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \in u_3^+(O_3^+ \cap O_2^+)$$

$$(\tau_{uv})_1(u) = u_1, \quad (\tau_{uv})_2(u) = \sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2} \quad \text{注意!}$$

$$(\overline{J} \tau_{uv})_{u(p)} = \frac{\partial}{\partial u_i} \tau_{uv} \Big|_{u(p)},$$

$$(\overline{J} \tau_{uv})_{u(p)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (\tau_{uv})_1}{\partial u_1}(u(p)) & \frac{\partial (\tau_{uv})_1}{\partial u_2}(u(p)) \\ \frac{\partial (\tau_{uv})_2}{\partial u_1}(u(p)) & \frac{\partial (\tau_{uv})_2}{\partial u_2}(u(p)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

従, 1

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_p$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_p = -\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_p - \left(\frac{\partial}{\partial v_2}\right)_p \quad \text{と成る.}$$

Section 12.4 : Thm 12.1.3 , Thm 12.2.3 の証明

試験範囲外

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(M, A) : n -次元 C^∞ 級多様体

$p \in M$.

Thm 12.1.3 (接点理論の局所性) (再掲: Prop 4.4.1 の
別添付版)

$$y \in T_p M \text{ と可成.}$$

$f_1, f_2 \in C^\infty(M; A)$ 且 p の近傍で一致可成と可成.

$$\text{このとき } y(f_1) = y(f_2)$$

Thm 12.2.3 (再掲): $(O, U, u) \in A$ with $p \in O$ と可成.

$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p$ は $T_p M$ の基底

Thm 12.1.3 の準備:

Lemma 12.4.1:

$\forall O_p : p$ の開近傍 in M

$\exists h \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ st.

$$\begin{cases} h(p) = 1 \\ h(q) = 0 \end{cases} \quad \text{for any } q \in M \setminus O_p$$

Hint : Thm 11.2.2 と同様に $\exists$ して示す。

Proof of Thm (2.1.3) :

$$\eta \in T_p M \text{ である.}$$

$$f_1, f_2 \in C^\infty(M; A) \text{ であり } p \text{ の周り } r\text{-近接である.}$$

$$\textcircled{\text{示}} \eta(f_1) = \eta(f_2)$$

$$\text{i.e. } \eta(f_1 - f_2) = 0$$

(η は線型)

$$\because f_1 \text{ と } f_2 \text{ は } p \text{ の周り } r\text{-近接である}$$

$$p \text{ の開近傍 } O_p \text{ in } M \text{ に対し } f_1|_{O_p} = f_2|_{O_p} \text{ である.}$$

$\exists \alpha \quad 0_p$ により Lemma 12.4.1 a $h \in C^\infty(M; A) \ni \partial$.

$\exists \alpha$ により $h \cdot (f_1 - f_2) = 0$ in $C^\infty(M; A)$ に注意.

$$= \text{ただし} \quad 0 = \gamma(h \cdot (f_1 - f_2))$$

$$= \gamma(h) \cdot \underbrace{(f_1 - f_2)(p)}_{\substack{0 \\ \text{"}}} + \underbrace{h(p)}_{\substack{1 \\ \text{"}}} \cdot \gamma(f_1 - f_2)$$

$$= \gamma(f_1 - f_2)$$

($\because$ 左側 = 1, 右側)

図

Thm 12.2.3 に注意 12.2.3 12.2.3 12.2.3 12.2.3

Thm 12.4.2:

$$\phi_u: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M, \quad v \mapsto \phi_u(v) : C^\infty(M; \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \underbrace{v_{\phi_u(f)}}_{}(f_u)$$

Section 4.1

方向微分

(Thm 4.3.5 の行列版)

は線型同型

準備:

Prop 12.4.3 :

$$\bar{\Phi}_u : T_{u(p)}U \rightarrow T_p M$$

$$y \mapsto \bar{\Phi}_u(y) : C^\infty(M; A) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f \mapsto y(f_u)$$

is well-defined $\checkmark$

$$\phi_u = \bar{\Phi}_u \circ \bar{\Psi}_{u(p), U}$$

Section 4

(Hint : easy)

図式

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\bar{\Psi}_{u(p), U}} & T_{u(p)} U & \xrightarrow{\bar{\Phi}_u} & T_p U \\
 & & \searrow \scriptstyle \alpha & \nearrow & \\
 & & \phi_u & &
 \end{array}$$

Recall : $\bar{\Psi}_{u(p), U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{u(p)} U$ は線型同型
 (Thm 4.3.5)

Thm 12.4.2 と 12.4.3 は 以下に示す T/P

Prop 12.4.4 :

$$\bar{\Phi}_u : T_{u(p)}U \rightarrow T_pM$$

$$y \mapsto \bar{\Phi}_u(y) : C^\infty(M; A) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto y(f_u)$$

は 線型同型

Check 項目 :

- 線型性 (easy : 略)
- 単射性
- 全射性

証明 a 準備

Prop 12.4.5 : $\mathcal{A}(0) = [(0, U, u)]$ (cf. Def 11.1.1)

特 1: $C^\infty(0; \mathcal{A}(0)) \rightarrow C^\infty(U)$

$$f \mapsto f_u$$

は 線型同型

(Hint : easy)

Cor 12.4.6 :

$$\forall f \in C^\infty(U)$$

$$\exists \tilde{f} \in C^\infty(M; A) \text{ s.t.}$$

$\tilde{f}_u$ is f on $u(p)$ for all $p \in U$

Hint : Prop 12.4.3 & Thm 11.2.2

Proof of Φ_u 单射性:

$$\textcircled{1} \text{ Ker } \bar{\Phi}_u = 0$$

$\gamma \in \text{Ker } \bar{\Phi}_u \Rightarrow \gamma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{I}_u}$.

$$\textcircled{2} \gamma = 0 \text{ in } T_{u(p)} U$$

$f \in C^\infty(U) \Rightarrow f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{I}_u}$.

$$\textcircled{3} \gamma(f) = 0$$

Cor 12.4.6 d')

$$\hat{f} \in C^\infty(M; A) \text{ 且}$$

$\hat{f}_u$ 为 f 在 $u(p)$ 的邻域上之扩张且 $f \in \mathcal{D}(u)$.

$$\gamma(f) = \gamma(\hat{f}_u) \quad \left(\because \gamma \text{ 为局部性} \right. \\ \left. \text{(cf. Prop 4.4.1)} \right)$$

$$= (\bar{\Phi}_u(\gamma))(\hat{f})$$

$$= 0 \quad (\because \gamma \in \text{Ker } \bar{\Phi}_u)$$

□

Proof of Φ_u is surjective:

$\zeta \in T_p M$ is arbitrary.

$$\textcircled{1} \exists \gamma \in T_{u(p)} U \text{ s.t. } \Phi_u(\gamma) = \zeta$$

for $f \in C^\infty(U)$ is as follows

$$\zeta_f := \zeta(\hat{f}) \in \mathbb{R} \text{ is defined.}$$

$\zeta = \zeta_f$ $\hat{f} \in C^\infty(M; A)$ with

$\hat{f}_u$ is f at $u(p)$ and $\hat{f}$ is constant

($\hat{f}$ is a lift of f Cor 12.4.6)

is possible.

ζ_f 是 f 的 ζ 函数。依此定义 ζ 是 $\mathcal{T}_{\text{hom}}(2.1.3)$ (3a) 同构性)

是 $\mathcal{T}_{\text{hom}}(2.1.3)$ 。

$\eta : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \zeta_f$ 是 $\mathcal{T}_{\text{hom}}(2.1.3)$ 。

$\eta \in \mathcal{T}_{\text{hom}}(U)$ 是 $\mathcal{T}_{\text{hom}}(U)$ 的 η 函数。

是 $\mathcal{T}_{\text{hom}}(U)$ 。

(easy ; 詳細略)

Section 12.5 : Thm 12.3.1 a 証明

試験範囲外

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(M, A) : n -次元 C^∞ 級多様体

$p \in M$.

$(O, U, u) \in A$ with $p \in O \cap O'$
 (O', V, v)

Thm 12.3.1 (再掲)

ヤコビ行列 $(J\tau_{uv})_{u(p)}$ (cf. Def 5.3.1) は

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial v_n}\right)_p \in T_p M$$

および

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p \in T_p M$$

は基底の変換行列

$$\text{i.e.} \quad \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_{j=1}^n \left((J\tau_{uv})_{u(p)} \right)_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\right)_p$$

$(i=1, \dots, n)$

Proof of Thm 12.3.1:

$i = 1, \dots, n$ fix.

$$\textcircled{\text{J.}} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_p = \sum_{j=1}^n \left((J \tau_{uv})_{u(p)} \right)_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \right)_p$$

$f \in C^\infty(M; A) \ni \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \subset A$.

$$\textcircled{\text{J.}} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_p (f) = \sum_{j=1}^n \left((J \tau_{uv})_{u(p)} \right)_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \right)_p (f)$$

$$T_{\mathbb{R}^D} = \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_p (f)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_{u(p)} (f_u) \quad (\because \left(\frac{\partial}{\partial u_j} \right)_p \text{ 定義})$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_{u(p)} (f_u|_{u(o\nu o')}) \quad (\because p \in u(o\nu o') \subset U_{\text{open}})$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_{u(p)} (\tau_{uv}^* (f_v|_{v(o\nu o')})) \quad (\because \text{Lemma 8.2.3})$$

$$= ((d\tau_{uv})_{u(p)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_{u(p)} \right)) (f_v|_{v(o\nu o')})$$

$$(\because \tau_{uv} \text{ is } C^\infty \text{ 級, Def 5.2.2})$$

$$= \sum_{i=1}^n \left((d\tau_{uv})_{u(p)} \left(\left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_{u(p)} \right) \right) (f_v|_{u(o \cap o')})$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \left((J\tau_{uv})_{u(p)} \right)_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \right)_{v(p)} \right) (f_v|_{u(o \cap o')}) \quad (\because \text{Thm 5.3.2})$$

$$= \sum_{j=1}^n \left((J\tau_{uv})_{u(p)} \right)_{ij} \left(\left(\frac{\partial}{\partial v_j} \right)_{v(p)} (f_v|_{u(o \cap o')}) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left((J\tau_{uv})_{u(p)} \right)_{ij} \left(\left(\frac{\partial}{\partial v_j} \right)_{v(p)} (f_v) \right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \left((J\tau_{uv})_{u(p)} \right)_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \right)_p \right) (f) \quad (\because u(p) \in v(o \cap o') \subset V_{\text{open}})$$

$$= \text{to } \mathbb{R}^D$$

