# Section 12 : $C^\infty$級関数の構成

意義 : $C^\infty$級多様体は$C^\infty$級関数をたくさん持っていることをみる.

Part II : 可微分多様体の定義, 各種構成

Section 7 : 局所座標系

8 : 座標変換

9 : 可微分多様体

10 : 正則部分多様体

11 : 射影空間

12 : $C^\infty$級関数の構成 ☆

内容

- 開部分多様体
- $C^\infty$級関数の延長

# Section 12.1 開部分多様体

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$(M, \mathcal{A})$：$n$次元$C^\infty$級多様体

$\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

この節では $\Omega$ に多様体構造を定める.

## Prop 12.1.1

$$LC(\Omega;\mathbb{R}^n) \subset LC(M;\mathbb{R}^n)$$

$$\parallel$$

$$\{(O, U, u) \in LC(M;\mathbb{R}^n) \mid O \subset \Omega\}$$

## Theorem 12.1.2

$$\mathcal{A}_\Omega := \mathcal{A} \cap LC(\Omega; \mathbb{R}^n) \subset LC(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

は $\Omega$ の極大 $C^\infty$-atlas

特に $(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ は $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体

## Def 12.1.3

$(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ を $(M, \mathcal{A})$ の開部分多様体という.

## Theorem 12.1.2 の Hint :

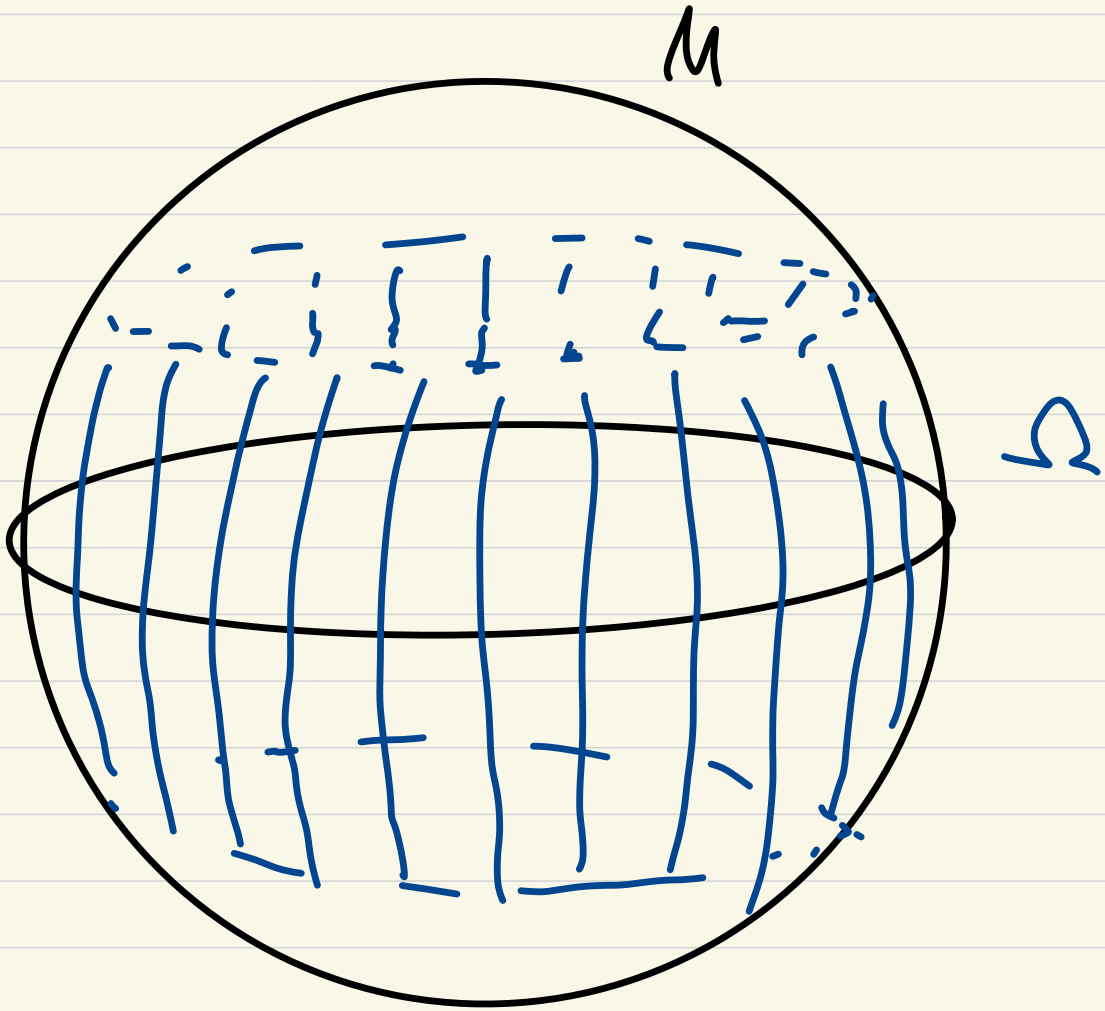
**Lemma 12.1.4**

$\forall (O, U, u) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$ with $O \cap \Omega \neq \emptyset$,

$(O \cap \Omega, u(O \cap \Omega), u|_{O \cap \Omega}) \in LC(\Omega; \mathbb{R}^n)$

( Hint : Prop 7.2.4 )

Ex 12.1.5



## Prop 12.1.6

$\forall f \in C^\infty(M; A)$,

$$f|_\Omega \in C^\infty(\Omega; A_\Omega)$$

Section 12.1 終

# Section 12.2 : $C^\infty$級関数の延長

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$(M, \mathcal{A})$ : $n$次元 $C^\infty$級多様体

$\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

記号 : $(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ : 開部分多様体

**Question :**

写像 $\mathrm{rest} : C^\infty(M;A) \to C^\infty(\Omega;A_\Omega)$

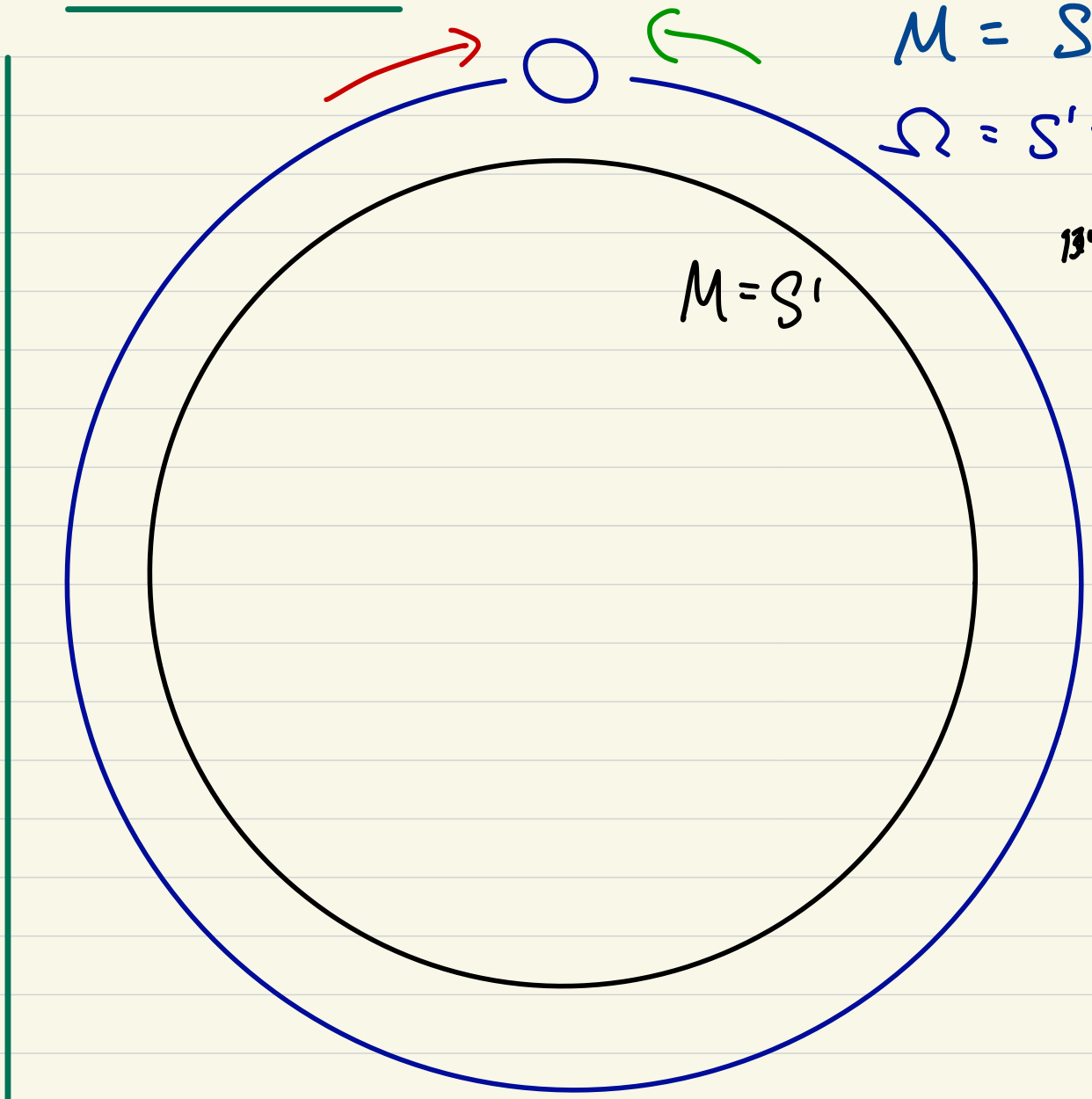
$$f \mapsto f|_\Omega$$

は全射？単射？

**Answer :** 全射とは限らない

単射とも限らない

## Ex 12.2.1




$M = S^1$

$\Omega = S^1 \setminus \{(0,1)\} \approx \mathbb{R}$

例えば

$h \in C^\infty(\Omega)$ を

$$h : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1}{1-x_2}$$

とすると,

$h$ は $M$ 上の $C^\infty$-級関数に延張できない.

特に rest は全射でない.

## Ex 12.2.2 ( Prop 3.4.9 で述べたもの )

$M = \mathbb{R}$, $\Omega = (-\infty, 0)$ とする.

$M$ 上のゼロ関数 $M$ と Ex 3.2.5 の $\rho$ を考える.

このとき $\mathcal{O}_M \neq \rho$ on $M$ だが

$\mathcal{O}_M|_\Omega = \rho|_\Omega =$ ゼロ関数 on $\Omega$

特に rest は単射でない.

この節の主定理

Mのハウスドルフ性が重要

**Theorem 12.2.3**: $p \in \Omega$ を固定する.

$\forall h \in C^\infty(\Omega; A_\Omega)$, $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M; A)$ s.t.

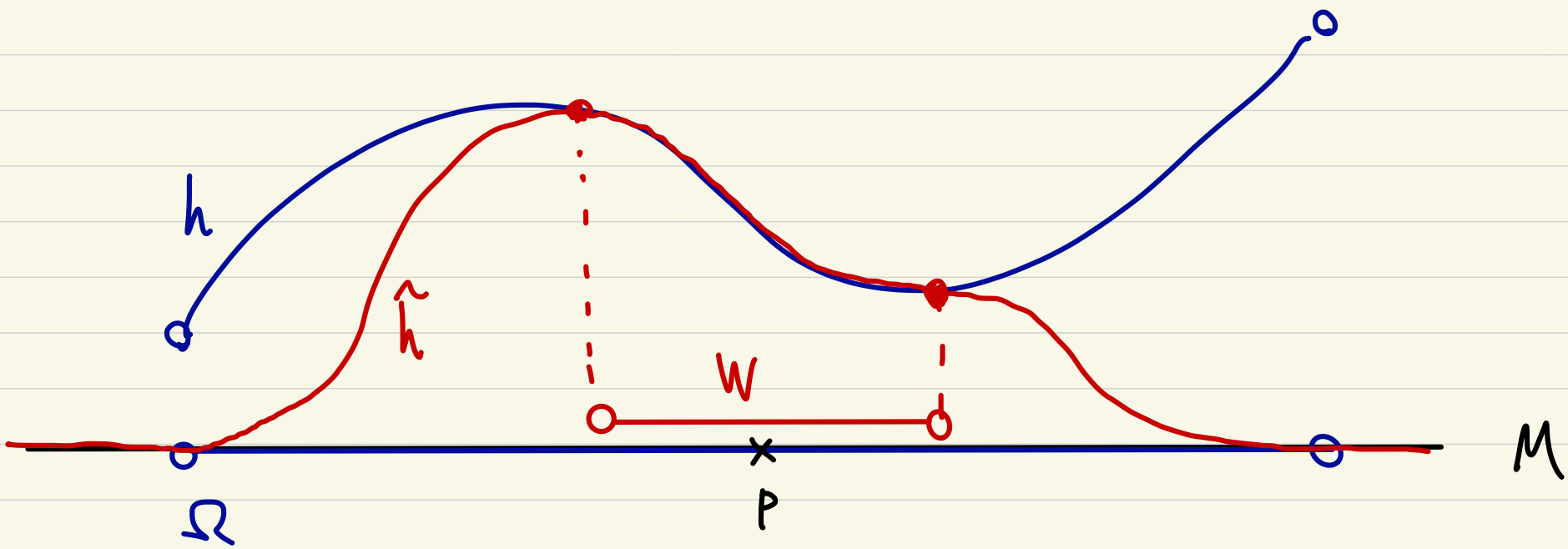
$\tilde{h}$ は $p$ のまわりで $h$ と一致

(i.e. $\exists W$ : $p$ の開近傍 in $\Omega$ s.t. $\tilde{h}|_W = h|_W$)

証明:

$\mathrm{rest} : C^\infty(M; A) \to C^\infty(\Omega; A_\Omega)$ は局所的には全射!

イメージ



# Section 3.4 を勉強した人向けの説明

$C_p^\infty(M;A)$, $C_p^\infty(\Omega;A_\Omega)$ を

$C^\infty(M;A)$, $C^\infty(\Omega;A_\Omega)$ の $p$ における

stalk とする.

(各自定義せよ)

## Theorem 12.2.4

$C_p^\infty(M;A) \to C_p^\infty(\Omega;A_\Omega)$, $[f]_p \mapsto [f|_\Omega]_p$

は well-defined かつ全単射

Thm 12.2.3 の証明のための準備

**Prop 12.2.5** $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ : $M$ の開被覆とする.
with $\Omega_\lambda \neq \emptyset$ ($\forall\lambda$)

$f : M \to \mathbb{R}$ について以下は同値

(i) $f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$

(ii) $\forall\lambda\in\Lambda$, $f|_{\Omega_\lambda} \in C^\infty(\Omega_\lambda : \mathcal{A}_{\Omega_\lambda})$

(Hint: Prop 9.1.2)

Prop 12.2.6 : 定数関数は $(M; \mathcal{A})$ 上 $C^\infty$ 級

Prop 12.2.7

$(O, U, \mathfrak{u}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ とし,

$r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ が

$\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - \mathfrak{u}(p)\| \leq r_0\} \subset U$ を満たすとする.

このとき $\mathfrak{u}^{-1}(\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - \mathfrak{u}(p)\| \leq r_0\}) \subset O \subset M$

はコンパクト

特に $M$ の閉集合

"$M$ はハウスドルフ" が重要

## Prop 12.2.8

$(O, U, \mathfrak{m}) \in \mathcal{A}$ とする.

このとき $\mathcal{A}_0 = [\{(O, U, \mathfrak{m})\}]$

(Hint: Thm 9.2.4)

## Proof of Thm 12.2.3

$h \in C^\infty(\Omega; A_\Omega)$ を任意にとる.

示 $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M; A)$, $\exists W$ : $p$ の開近傍 in $\Omega$

s.t. $\tilde{h}|_W = h|_W$

$(O, U, \mathbf{u}) \in A_\Omega$ with $p \in O$ をとる.

$r \in \mathbb{R}_{>0}$ を $\{ u \in U \mid \|u - \mathbf{u}(p)\| < r \} \subset U$

となるようにとる.

$W := \varphi^{-1}(\{u \in U \mid \|u-\varphi(p)\| < \frac{1}{3}r\}) \subset \Omega$

とおくと $W$ は $p$ の開近傍 in $\Omega$

示 $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M; A)$ s.t. $\tilde{h}|_W = h|_W$

$C^\infty$級関数 $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって

以下を満たすものをとる

(Thm 3.2.6 よりそのような $b$ は存在)

(i) $b(u) = 1$ if $\|u-\varphi(p)\| \leq \frac{1}{3}r$

(ii) $b(u) = 0$ if $\|u-\varphi(p)\| \geq \frac{2}{3}r$

$(u \in \mathbb{R}^n)$

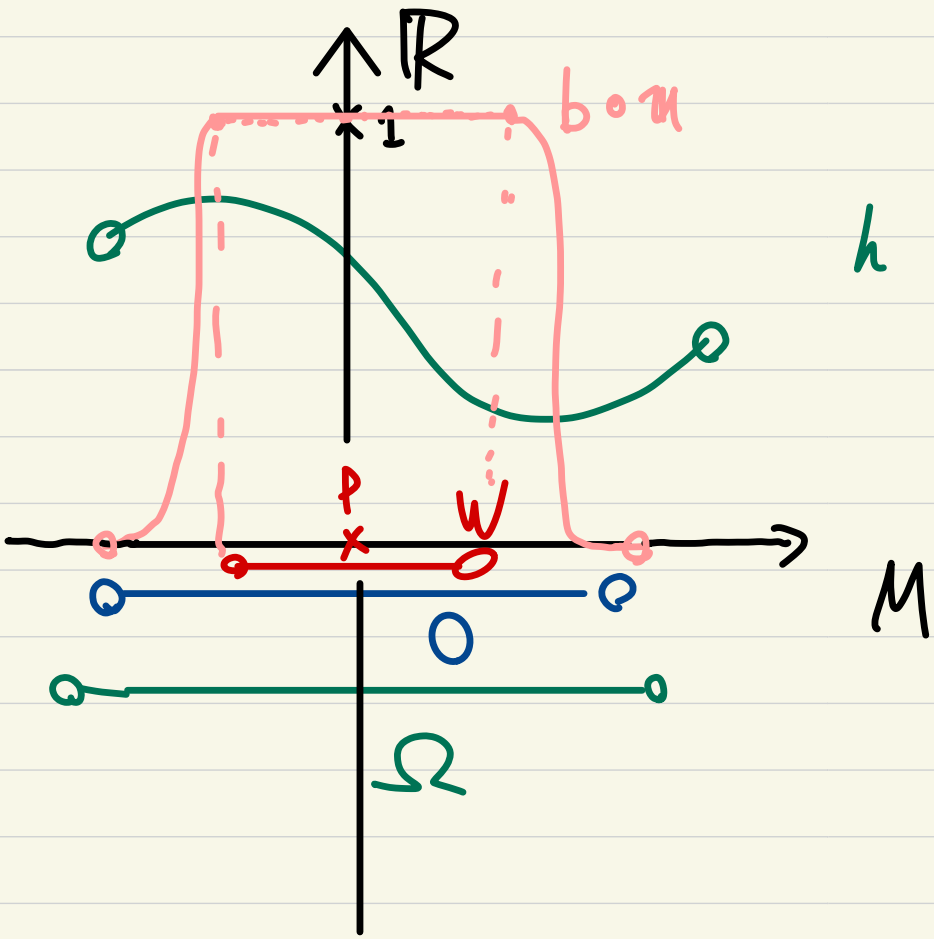
ここで $\tilde{h} : M \to \mathbb{R}$

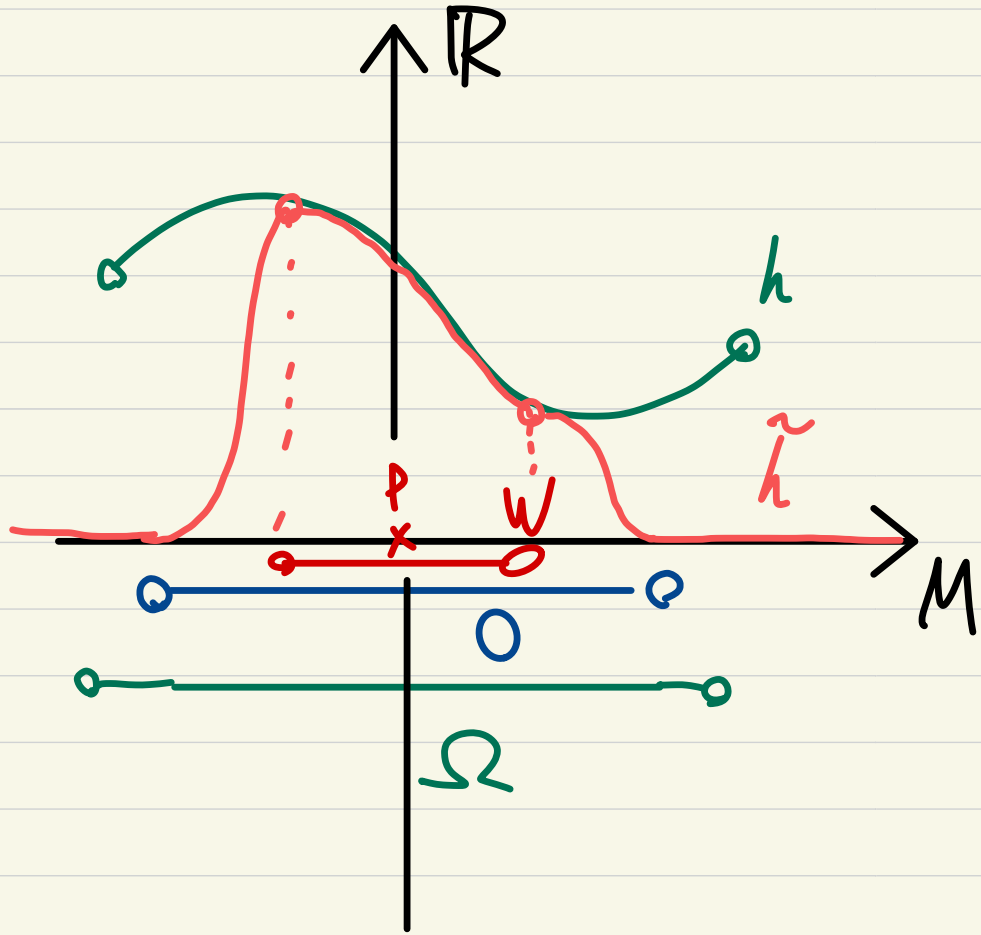
$$x \mapsto \begin{cases} h(x) \cdot b(m(x)) & (\text{if } x \in O) \\ 0 & (\text{if } x \notin O) \end{cases}$$

とおく.

定義より明らかに $\tilde{h}|_W = h|_W$.

イメージ



示 $\tilde{h} \in C^\infty(M; \mathcal{A})$

Prop 12.2.7 より

$O' := M \setminus u^{-1}(\{u \in U \mid \|u - u(p)\| \leq \frac{2}{3}r\})$

は $M$ の open set

特に $\{O, O'\}$ は $M$ の開被覆となる.

Prop 12.2.5 より以下を示せばよい

示 $\tilde{h}|_O \in C^\infty(O; \mathcal{A}_O)$ かつ

$\tilde{h}|_{O'} \in C^\infty(O'; \mathcal{A}_{O'})$

定義より $\hat{h}|_{O'}$ はゼロ関数.

特に Prop 12.2.7 より $h|_{O'} \in C^\infty(O' : A_{O'})$.

示 $\tilde{h}|_O \in C^\infty(O; \mathcal{A}_O)$

いま $\mathcal{A}_O = [\{(O, U, u)\}]$ (∵ Prop 12.2.8)

以下を示せば 1分 (∵ Thm 9.3.1)

示 $\tilde{h}_u \in C^\infty(U)$

$\tilde{h}$ の定義より $\tilde{h}_u = \underbrace{h_u}_{\in C^\infty(U)} \cdot \overbrace{(\phi|_U)}^{\text{関数の積}} \in C^\infty(U)$

$\in C^\infty(U)$

∎

**Cor 12.2.9** : $n \geq 1$ とする. このとき

$$\dim C^\infty(M;\mathcal{A}) \geq \infty$$

**Hint** $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ をとる.

$$C^\infty(O;\mathcal{A}_O) \cong C^\infty(U)$$

$$\cup$$

$$\{U \text{ 上の多項式関数}\}$$

← 無限次元

Section 12.2 終