Section 13: C^∞級写像と全微分

多様体間のC^∞級写像とその全微分を定義する.

Section 13.1 : C^∞級写像

設定 : $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M_i, \mathcal{A}_i)$: n_i次元 C^∞級多様体 $(i=1,2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$: 連続写像

Def 13.1.1: $\varphi : M_1 \to M_2$ が C^∞級

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi^*(C^\infty(M_2; A_2)) \subset C^\infty(M_1; A_1)$$

Def 13.1.2: $p \in M_1$ とする.

φ は p のまわりで C^∞ 級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists \Omega$: p の開近傍 in M_1,

$\varphi|_\Omega : \Omega \to M_2$ は C^∞ 級

ie. $(\varphi|_\Omega)^*(C^\infty(M_2; A_2)) \subset C^\infty(\underbrace{\Omega; A_1(\Omega)}_{\text{開部分多様体}})$

Thm 13.1.3 : 以下は同値

抽象論に便利な定義

(i) $\varphi : M_1 \to M_2$ は C^∞級

$\Updownarrow$

(ii) $\forall p \in M_1$, φ は p のまわりで C^∞級

計算で確認しやすい条件

(cf. Thm 13.1.5)

証明は Section 13.5 試験範囲外

Def 13.1.4: $(O, U, u) \in \mathcal{A}_1$

$(O', V, v) \in \mathcal{A}_2$ について

$$\varphi_{uv} : u(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V$$
$$u \mapsto v(\varphi(u^{-1}(u)))$$

とおく.

Thm 13.1.5: $p \in M_1$ とする. 以下は同値

(i) φ は p のまわりで C^∞ 級

$\Updownarrow$

(ii) $\exists (O, U, u) \in A_1$ with $p \in O$

$\exists (O', V, v) \in A_2$ with $\varphi(p) \in O'$ s.t.

φ_{uv} は $u(p)$ のまわりで C^∞ 級

$\mathbb{R}^{n_1}$

U open

i.e. $\exists U_{u(p)}$: $u(p)$ の開近傍 in $u(O \cap \varphi^{-1}(O'))$

s.t. $\varphi_{uv}|_{U_{u(p)}} : U_{u(p)} \to V$ は C^∞ 級

証明は Section 13.5 試験範囲外

Ex 13.1.6 : $(P(\mathbb{R}^3), [A_0])$: Prop 10.2.2 $(n=2)$ で定めた C^∞級多様体

Claim : $\varphi : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$

$$[x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_1^2 - x_2^2 : 2x_1x_2 + x_2^2 : x_3^2]$$

は well-defined で C^∞級写像

Well-defined性 : Check 項目

① $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $(x_1^2 - x_2^2,\ 2x_1x_2 + x_2^2,\ x_3^2) \neq 0$

② $\forall x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ with $x \sim y$, $(x_1^2 - x_2^2,\ 2x_1x_2 + x_2^2,\ x_3^2)$

$$\sim (y_1^2 - y_2^2,\ 2y_1y_2 + y_2^2,\ y_3^2)$$

C^∞級性：Check項目

示 $\forall p \in P(\mathbb{R}^3)$, φ は p のまわりで C^∞級

ここでは $p = [1:1:0]$ の場合だけ紹介する.

$$\left.\begin{array}{l}(O, U, u) := (O_1, U_1, u_1) \\ (O', V, v) := (O_2, U_2, u_2)\end{array}\right\} \in [A_0] \text{ とする.}$$

$p \in O$ かつ $\varphi(p) \in O'$ となる.

示 $\varphi_{uv} : u(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V$ は $u(p)$ のまわりで C^∞級

$$O \cap \varphi^{-1}(O') = \left\{ [x_1 : x_2 : x_3] \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 \neq 0 \\ 2x_1x_2 + x_2^2 \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$u(O \cap \varphi^{-1}(O')) = \{ u \in \mathbb{R}^2 \mid 2u_1 + u_1^2 \neq 0 \}$$

$$\varphi_{uv} : \underset{\{ u \in \mathbb{R}^2 \mid 2u_1 + u_1^2 \neq 0 \}}{\underset{\parallel}{u(O_1 \cap \varphi^{-1}(O_2))}} \to \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\parallel}{U_2}}$$

$$u \longmapsto v(\varphi(u^{-1}(u))) = \left(\frac{1}{2u_1 + u_1^2}, \frac{u_2^2}{2u_1 + u_1^2} \right)$$

は C^∞級

Section 13.2: 全微分

設定: $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M_i, \mathcal{A}_i)$: n_i次元C^∞級多様体 $(i=1,2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞級

$p \in M_1$

Prop 13.2.1: $\forall y \in T_pM_1$, $\quad y \circ \varphi^* \in T_{\varphi(p)}M_2$

(ここで $\varphi^* : C^\infty(M_2; A_2) \to C^\infty(M_1; A_1)$ とみなしている)

Def 13.2.2:

$$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2,\ y \mapsto y \circ \varphi^*$$

Prop 13.2.3: $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ は線型写像.

Thm 13.2.4: $(O, U, u) \in A_1$ with $p \in O$,

$(O', V, v) \in A_2$ with $\varphi(p) \in O'$ とする.

ヤコビ行列 $(J\varphi_{uv})_{u(p)}$ は

線型写像 $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_pM_2$ の

座標基底 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u_{n_1}}\right)_p\right\}$

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_{\varphi(p)}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial v_{n_2}}\right)_{\varphi(p)}\right\}$ についての 表現行列

特に $\mathrm{rank}\,(d\varphi)_p = \mathrm{rank}\,(J\varphi_{uv})_{u(p)}$

証明は Section 13.5 試験範囲外

Ex: 13.2.5: Ex 13.1.6 の設定において

$p = [1:1:0] \in P(\mathbb{R}^3)$ とする.

$(O, U, u) := (O_1, U_1, u_1)$
$(O', V, v) := (O_2, U_2, u_2)$ $\in [A_0]$ とすると

$p \in O$ かつ $\varphi(p) \in O'$ であり,

$$\varphi_{uv} : u(O_1 \cap \varphi^{-1}(O_2)) \to U_2$$

$$u(O_1 \cap \varphi^{-1}(O_2)) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid 2u_1 + u_1^2 \neq 0\}, \qquad U_2 = \mathbb{R}^2$$

$$u \longmapsto \left(\frac{1}{2u_1 + u_1^2}, \frac{u_2^2}{2u_1 + u_1^2} \right)$$

$u(p) = (1, 0)$ に注意すると

$$(J\varphi_{uv})_{u(p)} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{(2u_1+u_1^2)^2} & 0 \\ \dfrac{-2u_2^2}{(2u_1+u_1^2)^2} & \dfrac{2u_2}{2u_1+u_1^2} \end{pmatrix}\Bigg|_{u=(1,0)}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特に $\operatorname{rank}(d\varphi)_p = \operatorname{rank}(J\varphi_{uv})_{u(p)} = 1$.

Section 13.3: 合成写像の全微分

設定: $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M_i, \mathcal{A}_i)$: n_i 次元 C^∞ 級多様体

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞ 級

$\psi : M_2 \to M_3$: C^∞ 級

Thm 13.3.1 : $\psi \circ \varphi : M_1 \to M_3$ は C^∞級

(Thm 6.1.1 の対称体版)

Thm 13.3.2 : $p \in M_1$ とする.

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p \quad \text{as } T_pM_1 \to T_{\psi\circ\varphi(p)}M_3$$

(Thm 6.1.3 の対称体版)

Section 13.4 · 曲線の速度ベクトル 試験範囲外

準備中

Section 13.5: Thm 13.1.3, 13.1.5 の証明

試験範囲外

準備中