Section 14：閉正則部分多様体

C^∞級多様体の閉正則部分多様体を定義する。

さらに C^∞級写像の正則値のファイバーは閉正則部分多様体となることを紹介する。

Section 14.1 : 埋めこみと正則部分多様体

設定 : $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M, \mathcal{A}_M)$: n 次元 C^∞ 級多様体

$(N, \mathcal{A}_N)$: k 次元 C^∞ 級多様体

$\tau : N \to M$: C^∞ 級写像

Def 14.1.1 :

C^∞級写像 $\tau : N \to M$ が はめこみ

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in N$,

$(d\tau)_p : T_pN \to T_{\tau(p)}M$ が単射

Def 14.1.2 :

C^∞級写像 $\tau : N \to M$ が 埋めこみ

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ τ は はめこみ かつ 単射で,

$\tau : N \to \underbrace{\tau(N)}_{M\text{からの相対位相}}$ は 同相写像

Def. 14.1.3 :

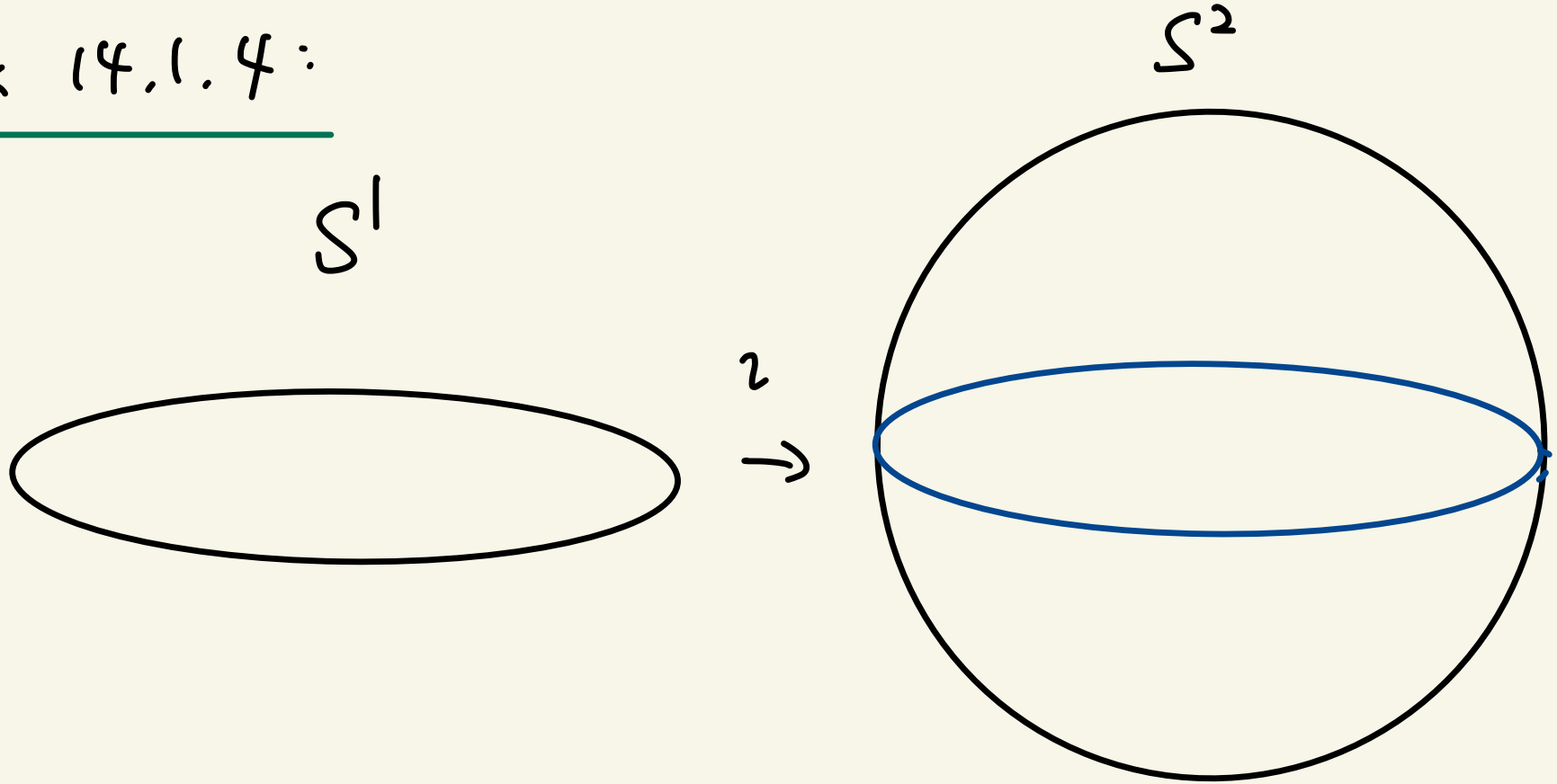
$\iota : N \to M$ が埋め込みであるとき

像 $\iota(N)$ を M の k 次元正則部分多様体という.

特に $\iota(N)$ が closed in M のとき

$\iota(N)$ を M の k 次元閉正則部分多様体という.

Ex 14.1.4:



$\iota : S^1 \to S^2,\ x \mapsto (x_1, x_2, 0)$ は埋めこみで

$\iota(S^1) = \{ y \in S^2 \mid y_3 = 0 \}$ は closed in S^2

$\rightsquigarrow$ $\iota(S^1)$ は S^2 の1次元閉正則部分多様体

Section 14.2 : 正則値と正則部分多様体

設定 : $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M_i, \mathcal{A}_i)$: n_i 次元 C^∞ 級多様体

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞ 級写像

Def 14.2.1: $q \in \varphi(M_1)$ が φ の正則値

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in \varphi^{-1}(\{q\})$,

$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ は全射.

Thm 14.2.2: $g \in \varphi(M_1)$ が正則値であるとする.

このとき

$N_g := \varphi^{-1}(\{g\})$ は M_1 の n_1-n_2 次元閉正則部分多様体.

より正確には,

位相空間 N_g の n_1-n_2 次元極大 C^∞-atlas A_{N_g} であって

以下の条件を満たすものがただ一つ存在する.

条件: 包含写像 $\iota : N_g \to M_1$ は埋め込みである.

(N_g, A_{N_g}) により C^∞ 級多様体とみなしている.

(証明略: Hint: 陰関数定理)

Ex 14.2.3 :

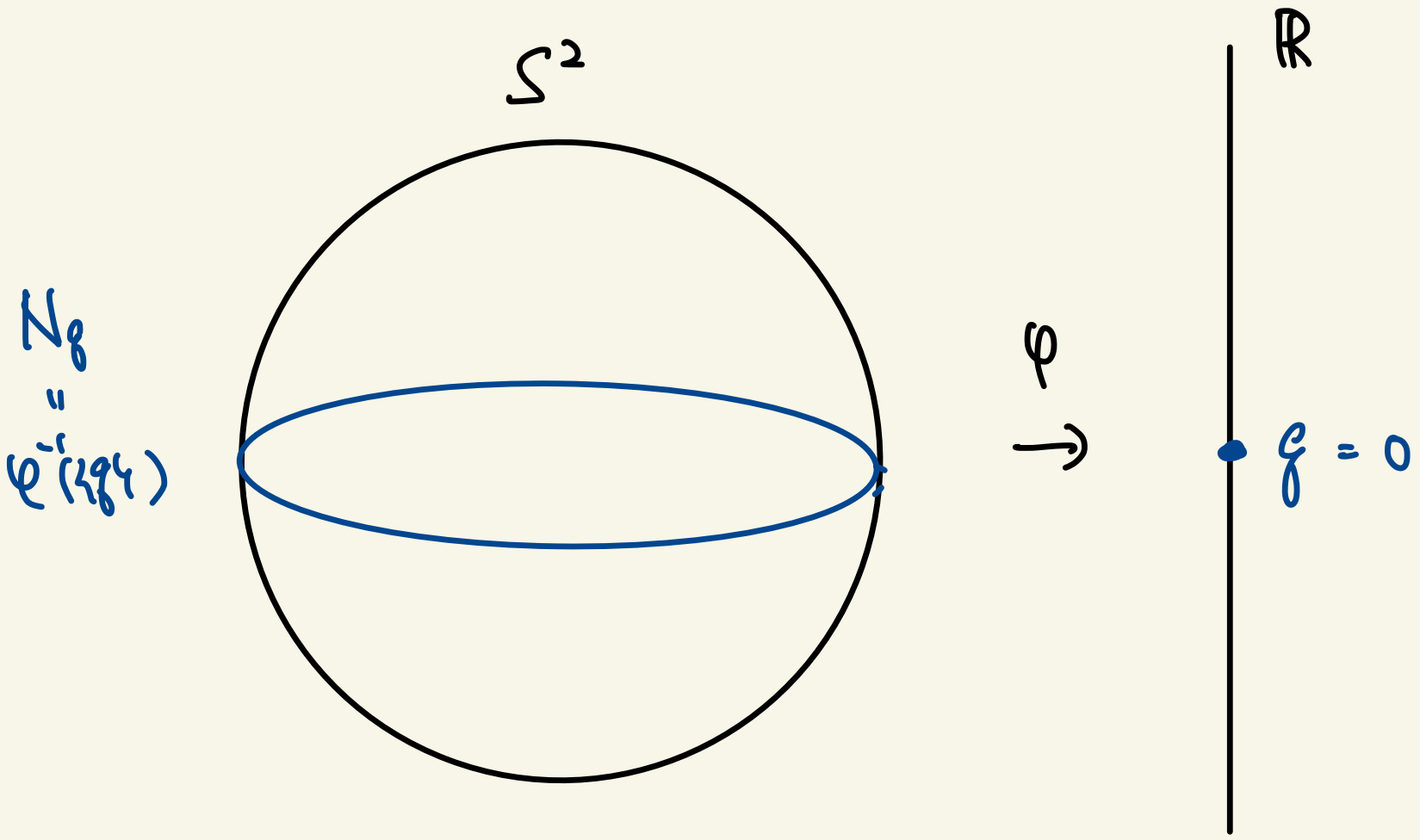
$\varphi : S^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_3$ は C^∞級写像.

$q := 0 \in \mathbb{R}$ は 正則値となる (計算略)

$N_q := \varphi^{-1}(\{q\}) = \{ y \in S^2 \mid y_3 = 0 \}$ は

S^2の 1次元閉正則部分多様体

(cf Ex 14.1.6)


S^2
$\mathbb{R}$
N_ξ
$=$
$\varphi^{-1}(\{\xi\})$
φ
$\xi = 0$

Thm 14.2.4: Thm 14.2.2 の設定で、

$$\forall p \in N_q, \quad T_p N_q = \mathrm{Ker}(d\varphi)_p$$

より正確には

$$\forall p \in N_q, \quad (d\iota)_p(T_p N_q) = \mathrm{Ker}(d\varphi)_p$$

Ex 14.2.5 :

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_2^3$ は C^∞級写像

$q := 1 \in \mathbb{R}$ とおく.

Claim : q は φ の 正則値

∵ $q \in \varphi(\mathbb{R}^3)$ は easy

$p \in \varphi^{-1}(\{q\})$ を fix

示 $(d\varphi)_p : T_p\mathbb{R}^3 \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}$ は 全射

$\dim T_p\mathbb{R}^3 = 3$, $\dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R} = 1$ であり,

ヤコビ行列 $(J\varphi)_p$ は適切な基底についての

$(d\varphi)_p : T_p\mathbb{R}^3 \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}$ の表現行列となるから

次を示せばよい

示 $\operatorname{rank}(J\varphi)_p = 1$

$p = (p_1, p_2, p_3)$ とおく.

$$(J\varphi)_p = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}_{x=p}$$

$$= \begin{pmatrix} 2p_1 & 2p_2 & 2p_3 \end{pmatrix}$$

である.

$\varphi(p) = g = 1$ より $\sum_i p_i^2 = 1$ に注意. 特に $p \neq 0$.

従って $\operatorname{rank}(J\varphi)_p = 1$ $\blacksquare$

Thm 14.2.2 より

$$N_g := S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_i x_i^2 = 1\} \text{ は}$$

$\mathbb{R}^3$ の2次元閉正則部分多様体

このときの S^2 上の多様体構造は Ex 9.3.3 $(n=2)$

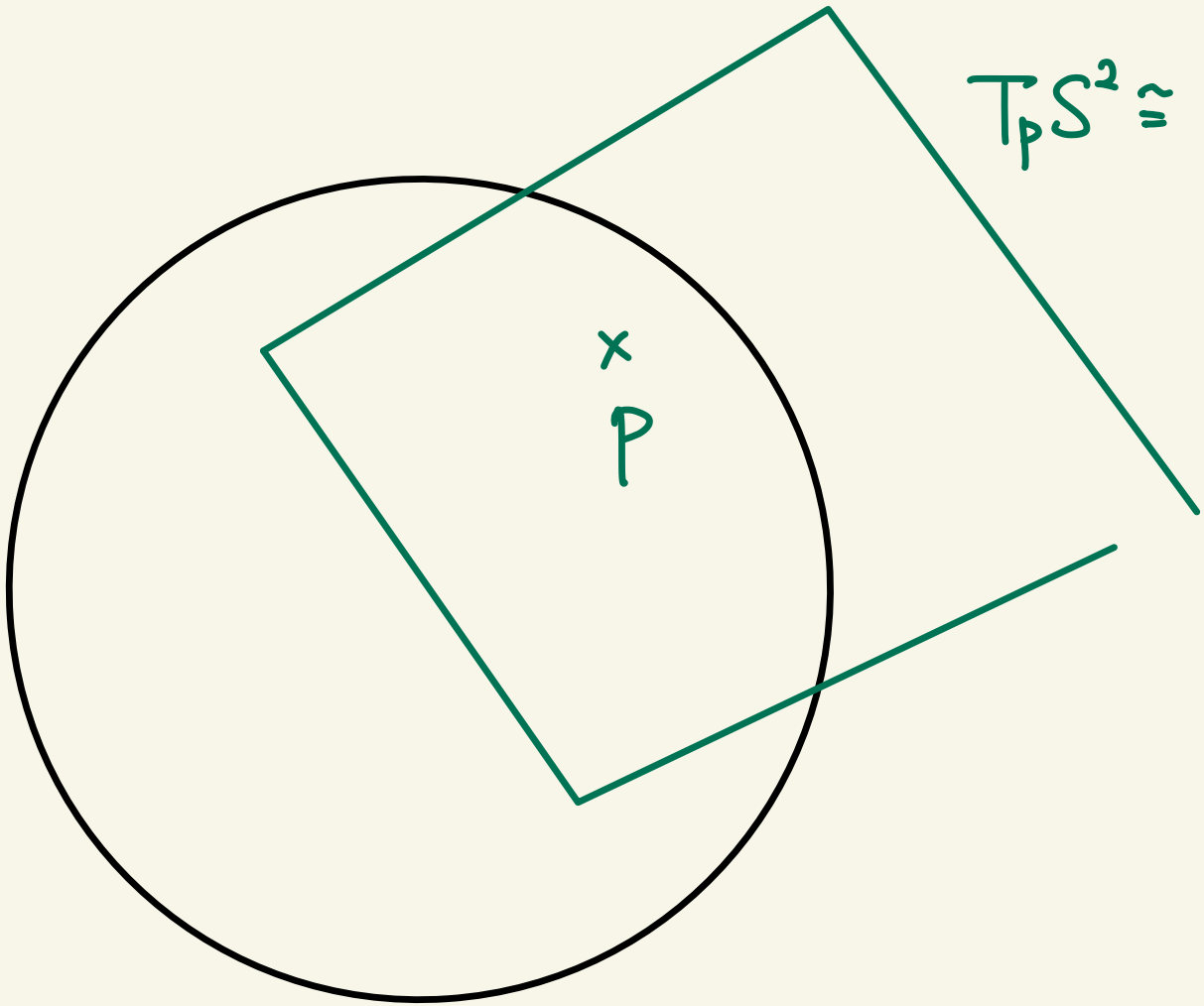
のものと一致

$\iota : N_g \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする.

$p \in N_g = S^2$ を fix.

<u>Claim</u>

$$(d\iota)_p(T_p N_g) = \left\{ a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + a_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \\ p \perp (a_1, a_2, a_3) \end{array} \right\}$$



$$T_pS^2 \cong \{ a \in \mathbb{R}^3 \mid p \perp a \}$$

∵ Thm 14.2.4 より次を示せばよい。

(示) $\mathrm{Ker}\,(d\varphi)_p = \left\{ a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p + a_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_p \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \\ p \perp (a_1, a_2, a_3) \end{array} \right\}$

いま $(J\varphi)_p = (2p_1 \;\; 2p_2 \;\; 2p_3)$ より

$$(d\varphi)_p\left(\sum a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = 0 \iff \sum_i 2p_i a_i = 0$$

$$\iff p \perp (a_1, a_2, a_3)$$

∎