Section 15 : 微分同相

設定 : $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

(M_i, A_i) : n_i 次元 C^∞ 級多様体 $(i=1,2)$

Section 15.1: 微分同相

Def 15.1.1: C^∞級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が

微分同相

$\overset{\text{def}}{\iff}$ φ は同相写像で，逆写像もC^∞級

Def 15.1.2: (M_1, A_1) と (M_2, A_2) が微分同相

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 微分同相写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が存在する．

Ex 15.1.3 : S^1, $P(\mathbb{R}^2)$: 1次元多様体

$\varphi : S^1 \to P(\mathbb{R}^2)$, $x = (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \left[\cos\frac{\theta}{2} : \sin\frac{\theta}{2}\right]$

は 微分同相写像

(ちなみに $S^1 \to P(\mathbb{R}^2)$, $x \mapsto [x]$ は 単射ではない (二重ヒフク))

⑭ 多様体論では"微分同相で不変な性質"に着目する.

Thm 15.1.4: $\varphi : M_1 \to M_2$: 微分同相写像

$p \in M_1$ とする.

このとき $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ は線型同型.

Cor 15.1.6: $M_1 \neq \emptyset$, $M_2 \neq \emptyset$ とする.

M_1 と M_2 が微分同相なら $n_1 = n_2$

n_1 : M_1 の次元, n_2 : M_2 の次元

Section 15.2. 逆写像定理

Def 15.2.1: $p \in M_1$ とする.

C^∞ 級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が

p のまわりで 微分同相

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \Omega$: p の開近傍 in M_1

s.t. $\varphi(\Omega) \underset{\text{open}}{\subset} M_2$

$\varphi|_\Omega : \Omega \to \varphi(\Omega)$ は微分同相.

Prop 15.2.1 : C^∞級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ について 次下は同値

(i) φ は微分同相.

⇕

(ii) φ は全単射で, かつ

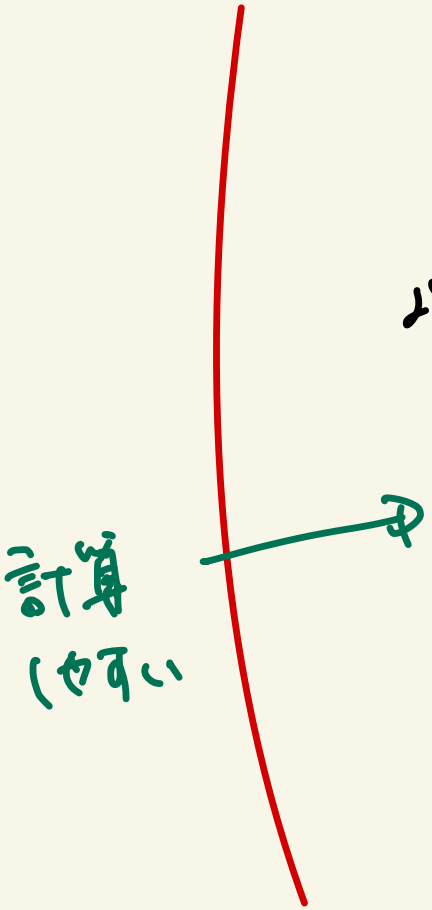
$\forall p \in M_1$, p のまわりで微分同相

Thm 15.2.2 (逆写像定理)

$p \in M_1$ とし，

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞ 級写像 とする．

以下は同値



(i) $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ が 線型同型

⇕

(ii) φ は p のまわりで 微分同相

重 $(d\varphi)_p$ は φ の p における一次近似！