Section 16 : ベクトル場

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(M, \mathcal{A})$: n 次元 C^∞ 級多様体

Section 16.1 : C^∞級ベクトル場

$$X := \{ X_p \in T_pM \}_{p \in M}$$ を考える.

Def 16.1.1 : 各 $f \in C^\infty(M;A)$ について

$$Xf : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto X_p(f)$$

とおく.

Def 16.1.2 : X が(C^∞級)ベクトル場

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall f \in C^\infty(M;A),\ Xf \in C^\infty(M;A)$$

Ex 16.1.3 : $M = \mathbb{R}^2$ のとき

$$X = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p \right\}_{p \in \mathbb{R}^2}$$

は ベクトル場

$$Y = \left\{ -p_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + p_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p \right\}_{p \in \mathbb{R}^2}$$

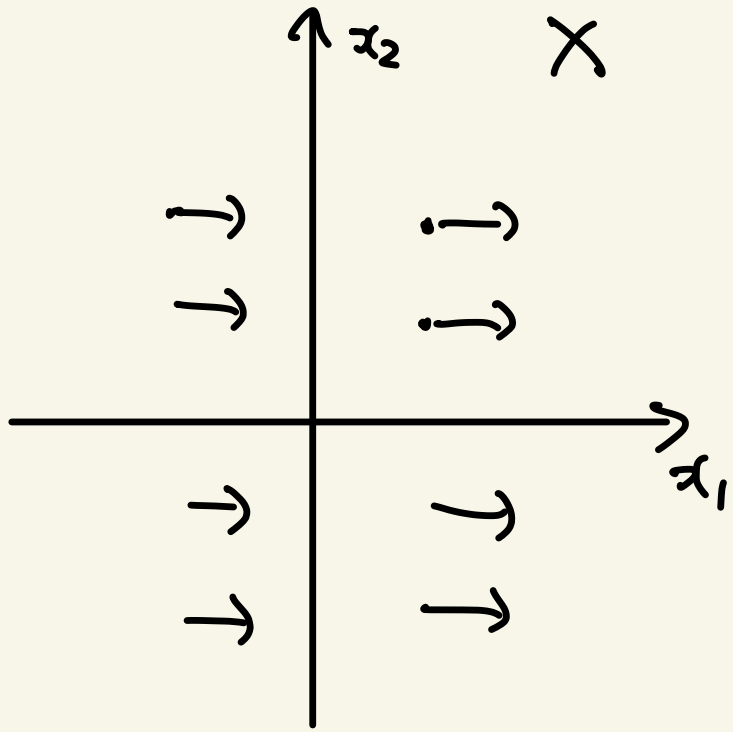
($f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ について

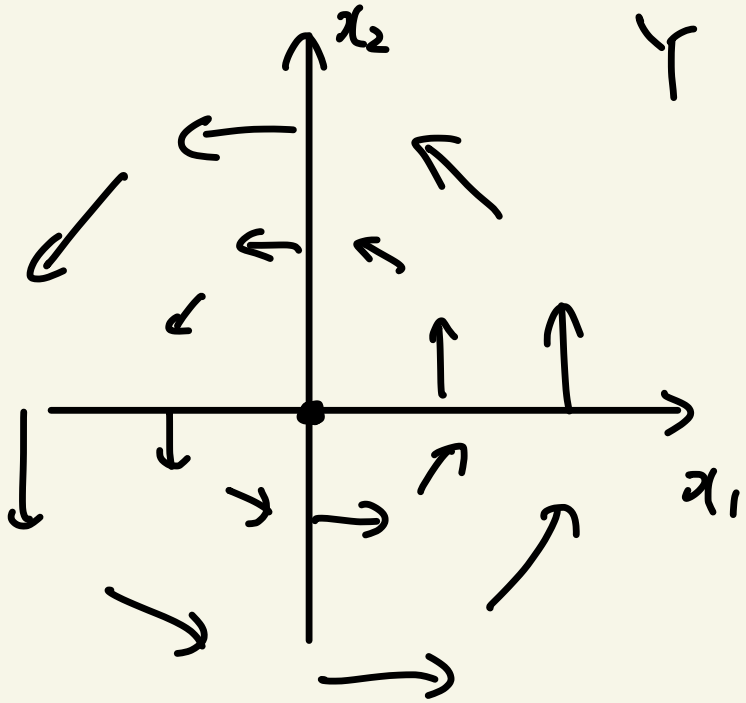
$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (\text{偏導関数})$$

$$Yf : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p \mapsto -p_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + p_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)$$

つまり $Yf = -x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$)

$f(x-y)$





Ex 16.1.4

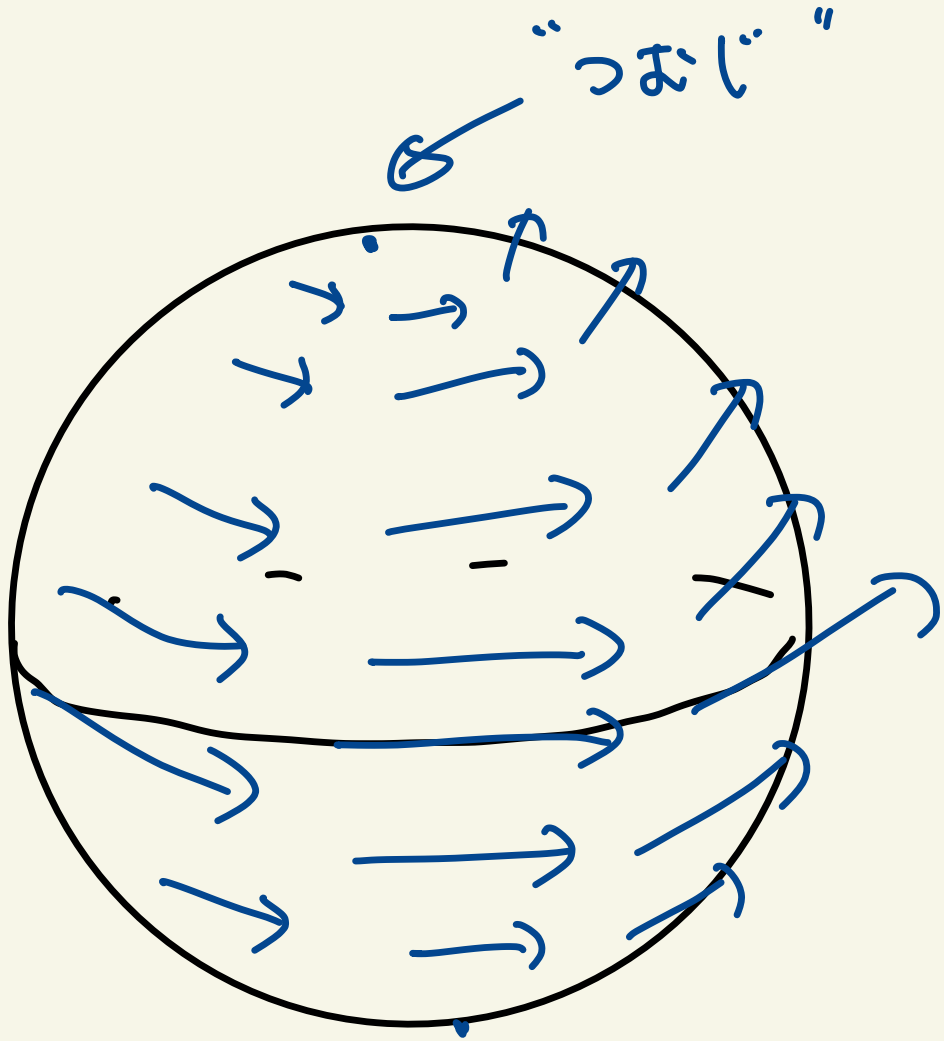
"つむじ" の話

Theorem 16.1.4 (Hairy ball theorem)

$\forall X = \{X_p \in T_pS^2\}$: S^2 上のベクトル場,

$\exists p \in S^2$ s.t. $X_p = 0$

(証明は簡単ではない: 不動点定理の一種)


"つむじ"

Section 16.2 · ベクトル場の局所表示

$$X = \{X_p \in T_pM\}_{p \in M}$$ を考える.

Def 16.2.1:

各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ について

$$(\xi_u^X)_i : U \to \mathbb{R} \quad (i = 1, \cdots, n)$$ を

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} (\xi_u^X)_i (u(p)) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \quad \forall p \in O$$

となるように定める (一意に定まる)

Thm 16.2.2: 以下は同値

(i) $X = \{X_p \in T_pM\}_{p \in M}$ はベクトル場

$\Updownarrow$

(ii) $\forall (O, U, \mathfrak{u}) \in \mathcal{A}$, $\forall i = 1, \cdots, n$,

$(\xi^X_{\mathfrak{u}})_i \in C^\infty(U)$

$\Updownarrow$

(iii) $\forall p \in M$, $\exists (O, U, \mathfrak{u}) \in \mathcal{A}$

s.t. $\begin{cases} p \in O \\ (\xi^X_{\mathfrak{u}})_1, \cdots, (\xi^X_{\mathfrak{u}})_n : U \to \mathbb{R} \\ \quad \text{は } \mathfrak{u}(p) \text{ のまわりで } C^\infty \text{級} \end{cases}$

Section 16.3：代数的特徴付け

$\Gamma(TM) := \{ X := \{X_p\}_{p \in M} \mid X$ はベクトル場$\}$

とおく。

Thm 16.3.1：$\Gamma(TM)$ は以下の和，スカラー倍について

ベクトル空間

和：$X + Y := \{X_p + Y_p\}_p \quad (X, Y \in \Gamma(TM))$

スカラー倍：$\lambda X := \{\lambda X_p\}_p \quad (X \in \Gamma(TM), \lambda \in \mathbb{R})$

一方

$$\mathfrak{X}(M) := \{ \phi \in \underset{\overset{\shortparallel}{\mathcal{L}(C^\infty(M;A),\, C^\infty(M;A))}}{\mathrm{End}(C^\infty(M;A))} \mid \phi(f \cdot g) = f \cdot \phi(g) + \phi(f) \cdot g \}$$

(場の) ライプニッツ則

とおく.

Prop 16.3.2: $\mathfrak{X}(M)$ は $\mathrm{End}(C^\infty(M;A))$ の線型部分空間

Prop 16.3.3: 各 $X \in \Gamma(TM)$ について

$\tilde{X} : C^\infty(M;A) \to C^\infty(M;A),\ f \mapsto Xf$

は $\mathfrak{X}(M)$ の元

Thm 16.3.4: $\Gamma(TM) \to \mathfrak{X}(M),\ X \mapsto \tilde{X}$

は線型同型.

Section 16.4 : ブラケット積

Prop 16.4.1 : 各 $\phi, \psi \in \mathfrak{X}(M)$ について

$$[\phi, \psi] : C^\infty(M;A) \to C^\infty(M;A)$$
$$f \mapsto \phi(\psi(f)) - \psi(\phi(f))$$

とおく.

このとき $\underbrace{[\phi, \psi]}_{\text{ブラケット積}} \in \mathfrak{X}(M)$

特に Thm 16.3.4 の対応から $P(\mathcal{M})$ にもブラケット積が

定義される.

Ex 16.4.2 : $M = \mathbb{R}^2$ のとき

$$X = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p \right\}_{p \in \mathbb{R}^2}$$ は ベクトル場

$$Y = \left\{ -p_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + p_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p \right\}_{p \in \mathbb{R}^2}$$ (Ex 16.1.3)

各 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$YXf = -x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

$$Yf = -x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$XYf = -x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$\rightsquigarrow [X, Y]f$

$$= XYf - YXf$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

特に $[X, Y] = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p \right\}_p$