

幾何学 A 演習問題 No.10 問 112–問 122

中レポート課題は問 114, 問 119.

キーワード: 開部分多様体, C^∞ 級関数の延長, 接空間.

設定 (問 112 から問 115 まで): $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする. また Ω を M の開集合とする.

問 112. $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}$ とする. このとき $(O \cap \Omega, \mathbf{u}(O \cap \Omega), \mathbf{u}|_{O \cap \Omega}) \in \mathcal{A}$ となることを示せ.

問 113. $\mathcal{A}(\Omega)$ が Ω 上の極大 C^∞ -atlas であることを示せ (講義 Theorem 11.1.1).

問 114. (中レポート) 写像

$$r : C^\infty(M; \mathcal{A}) \rightarrow C^\infty(\Omega; \mathcal{A}(\Omega)), f \mapsto f|_\Omega$$

が well-defined であることを示せ. (講義 Theorem 11.2.1 の前半).

問 115. 写像

$$r : C^\infty(M; \mathcal{A}) \rightarrow C^\infty(\Omega; \mathcal{A}(\Omega)), f \mapsto f|_\Omega$$

が $\mathbb{R}$ 代数準同型であることを示せ. (講義 Theorem 11.2.1 の後半).

問 116. 写像

$$r : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}), f \mapsto f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

が全射ではないことを示せ.

問 117. 写像

$$r : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty((-\infty, 0)), f \mapsto f|_{(-\infty, 0)}$$

が単射ではないことを示せ.

問 118. $h \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ を

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$$

と定める. また $p = 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とおく. このとき $\tilde{h} \in C^\infty(\mathbb{R})$ であって, $\tilde{h}|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ が p のまわりで h と一致するようなものを構成せよ.

設定 (問 119 から問 122 まで): $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体, $p \in M$ とする.

問 119. (中レポート) 接空間 $T_p M$ が $\mathcal{L}(C^\infty(M; \mathcal{A}), \mathbb{R})$ の線型部分空間であることを示せ (講義 Proposition 12.1.2).

設定 (問 120 から問 122 まで): 上記設定に加えて $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ を固定する.

問 120. 各 $v \in \mathbb{R}^n$ について,

$$\phi_{\mathbf{u}}(v) : C^\infty(M; \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto v_{\mathbf{u}(p)}(f_{\mathbf{u}})$$

と定める. ただし $v_{\mathbf{u}(p)} \in T_{\mathbf{u}(p)} U$ は $v \in \mathbb{R}^n$ についての $\mathbf{p} \in U$ における方向微分 (講義 Section 4) とする. 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ について, $\phi_{\mathbf{u}}(v) \in T_p M$ となることを示せ (講義: Proposition 12.2.2 の一般化).

問 121. $e_1, \dots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とすると, 各 $i = 1, \dots, n$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} \right)_p = \phi_{\mathbf{u}}(e_i)$$

となることを示せ.

問 122.

$$\phi_{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M, v \mapsto \phi_{\mathbf{u}}(v)$$

と定める. この写像が線型であることを示せ.