

キーワード: 座標変換と座標基底, C^∞ 級写像, 全微分.

設定: 問 123 から問 125 まで $(S^2, [\mathcal{A}_0])$ を講義 Example 9.3.3 で定めた 2 次元 C^∞ 級多様体とする (2 次元球面).

問 123. (8 月 2 日問題文修正) $p = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in S^2$ とし,

- $(O, U, \mathbf{u}) := (O_1^+, U_1^+, \mathbf{u}_1^+) \in \mathcal{A}_0$,
- $(O', V, \mathbf{v}) := (O_2^+, U_2^+, \mathbf{u}_2^+) \in \mathcal{A}_0$,

とする (cf. 講義 Example 8.1.2). このとき

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_2} \right)_p \in T_p S^2$$

をそれぞれ

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_2} \right)_p \in T_p S^2$$

の一次結合で表せ (講義 Example 12.3.2 の類似).

問 124. 連続写像

$$\varphi : S^2 \rightarrow S^2, x \mapsto (-x_1, x_2, x_3)$$

を考える, φ は $p = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in S^2$ のまわりで C^∞ 級であることを示せ (講義 Example 13.1.6 の球面版).

問 125. 上記 $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ が C^∞ 級であることは認めることにする. $p = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \in S^2$ について $\text{rank}(d\varphi)_p$ を求めよ (講義 Example 13.2.5 の球面版).

設定: 問 126 から問 127 まで各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について, $(P(\mathbb{R}^{n+1}), [\mathcal{A}_0])$ を講義 Proposition 10.2.2 で定めた n 次元 C^∞ 級多様体とする (射影平面). 連続写像

$$\varphi : P(\mathbb{R}^2) \rightarrow P(\mathbb{R}^3), [x_1 : x_2] \mapsto [x_1 : x_2 : 0]$$

について考える.

問 126. $\varphi : P(\mathbb{R}^2) \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$ が C^∞ 級であることを示せ (講義 Example 13.1.6 の類似).

問 127. $p = [1 : 1] \in P(\mathbb{R}^2)$ について $\text{rank}(d\varphi)_p$ を求めよ (講義 Example 13.2.5 の類似).

設定: 問 128 から問 129 まで $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, 各 $i = 1, 2, 3$ について $(M_i, \mathcal{A}_i)$ をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする. $\varphi : M_1 \rightarrow M_2, \psi : M_2 \rightarrow M_3$ をそれぞれ C^∞ 級写像とする.

問 128. (中レポート: 8 月 2 日問題文修正) 合成写像

$$\psi \circ \varphi : M_1 \rightarrow M_3$$

が C^∞ 級写像であることを示せ (講義 Theorem 13.3.1).

問 129. (中レポート: 8 月 2 日問題文修正) $p \in M_1$ とする.

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p \text{ as } T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_3$$

を示せ (講義 Theorem 13.3.2).