幾何学 A 演習問題 No.12 問 131–問 133

中レポート課題は問 131, 問 133.

キーワード: 微分同相, ベクトル場.

**問 130.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M, \mathcal{A})$ を $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体とする. このとき $M$ 上の恒等写像

$$\mathrm{id}_M : M \to M,\ x \mapsto x$$

が微分同相であることを示せ. また各 $p \in M$ について, 全微分

$$(d(\mathrm{id}_M))_p : T_pM \to T_pM$$

が恒等写像であることを示せ.

**問 131.** (中レポート) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, 2)$ を $n_i$ 次元 $C^\infty$ 級多様体とする. $\varphi : M_1 \to M_2$ を微分同相写像とし, $p \in M_1$ とする. このとき

$$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$$

が線型同型写像であることを示せ (Hint: 問 130 を用いてよい).

**問 132.** $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M, \mathcal{A})$ を $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体とする. 各 $\phi \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ について,

$$\phi_p : C^\infty(M; \mathcal{A}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto (\phi(f))(p)$$

とおくと, $\phi_p \in T_pM$ であることを示せ.

**問 133.** (中レポート) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M, \mathcal{A})$ を $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体とする.

$$\Gamma(TM) \to \mathfrak{X}(M),\ X \mapsto \tilde{X}$$

が線型同型写像であることを示せ (講義 Theorem 16.3.4: Hint 問 131 を用いてよい).