

## 幾何学 A 演習問題 No.2 問 15-問 27

中レポート課題は問 21, 問 25, 問 26.

キーワード:  $\mathbb{R}^n$  の開集合上の  $C^\infty$  級関数

以下  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  とし,  $U$  を  $\mathbb{R}^n$  の空でない開集合とする.

問 15. (解析の復習)  $U$  上の  $C^1$  級関数は全微分可能であることを示せ.

問 16. (解析の復習)  $U$  上の全微分可能な関数は連続であることを示せ.

問 17. (解析の復習)  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  とする.  $U$  上の  $C^k$  級関数は  $U$  上  $C^{k-1}$  級でもあることを示せ (講義: Proposition 3.1.3).

問 18. (解析の復習)  $k \geq 1$  とし,  $i = 1, \dots, n$  とする. 各  $f, g \in C^k(U)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  について, 以下が成り立つことをそれぞれ示せ (講義: Proposition 3.3.4).

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}. \quad (3)$$

問 19. (解析の復習)  $n$  変数多項式関数が  $\mathbb{R}^n$  上  $C^\infty$  級であることを示せ (講義: Proposition 3.2.1).

問 20. (やや難: 解析の復習)  $\alpha$  を実数とする.

(1) 正の実数  $t$  について, 実数  $t^\alpha$  の定義を述べ, その定義が well-defined であることを示せ (Hint: まず  $\alpha$  が整数の場合の定義を述べ, 次に  $\alpha$  が有利数の場合の定義を述べよ. 最後に  $\alpha$  が一般の実数の場合には極限の形で  $t^\alpha$  を定義せよ).

(2) 関数

$$\phi_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^\alpha$$

が  $\mathbb{R}_{>0}$  上  $C^\infty$  級であることを示せ (講義: Proposition 3.2.2).

問 21. (中レポート問題; 解析の復習)  $V$  を  $\mathbb{R}$  の空でない開集合とする. また  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  を  $U$  上の  $C^\infty$  級関数,  $h : V \rightarrow \mathbb{R}$  を  $V$  上の  $C^\infty$  級関数とし,  $U \cap g^{-1}(V) (\subset U)$  は空でないとする.

(1)  $U \cap g^{-1}(V)$  上で  $h \circ g$  の偏導関数を,  $g$  の偏導関数と  $h$  の導関数を用いて表せ (連鎖律).

(2)

$$f = h \circ g : U \cap g^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$$

は  $U \cap g^{-1}(V)$  上  $C^\infty$  級であることを示せ (講義: Proposition 3.2.3).

問 22. 変数  $t$  についての実多項式  $P(t)$  について,

$$f_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} P(\frac{1}{x})e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

とおく.

(1) 任意の多項式  $P(t)$  について,  $f_P$  が  $\mathbb{R}$  上連続であることを示せ.

(2) 任意の多項式  $P(t)$  について,  $f_P$  が  $\mathbb{R}$  上  $C^\infty$  級であることを示せ (講義: Example 3.2.5 の一般化).

(3) (重要度:低) 以下の関数が  $x = 0$  においてテイラー展開不可能であることを示せ:

$$\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

問 23.  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  with  $0 < r_1 < r_2$  とする. このとき  $\mathbb{R}^n$  上の  $C^\infty$  級関数

$$b = b_{p,r_1,r_2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

であって, 以下の二条件を満たすものが存在することを示せ (講義:Theorem 3.2.6):

条件 (i)  $b(x) = 1$  for any  $x \in \mathbb{R}^n$  with  $\|x - p\| \leq r_1$ .

条件 (ii)  $b(x) = 0$  for any  $x \in \mathbb{R}^n$  with  $\|x - p\| \geq r_2$ .

問 24.  $p \in U$  とし,  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  with  $0 < r_1 < r_2$  and  $\mathcal{U}_{r_2}(p) \subset U$  とする. ただし  $\mathcal{U}_{r_2}(p)$  は  $p$  の  $r_2$  開近傍 (in  $\mathbb{R}^n$ ) とする. また  $b_{p,r_1,r_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  を上の問題の二条件を満たす  $\mathbb{R}^n$  上の  $C^\infty$  級関数として固定しておく. ここで各  $f \in C^\infty(U)$  について,

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x) \cdot b_{p,r_1,r_2}(x) & (\text{if } x \in U), \\ 0 & (\text{if } x \notin U) \end{cases}$$

と定める. このとき任意の  $f \in C^\infty(U)$  について, 以下が成り立つことをそれぞれ示せ:

(1)  $\tilde{f}$  は  $\mathbb{R}^n$  上  $C^\infty$  級である.

(2) 任意の  $i = 1, \dots, n$  について,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p)$ .

問 25. (中レポート問題)  $C^k(U)$  は  $C(U)$  の部分  $\mathbb{R}$  代数であることを示せ (講義: Theorem 3.3.2).

問 26. (中レポート問題)  $C^\infty(U)$  は  $C(U)$  の部分  $\mathbb{R}$  代数であることを示せ (講義: Corollary 3.3.3).

問 27. (重要度:低)  $n \geq 1$  とする. このとき  $C^\infty(U)$  はベクトル空間として無限次元であることを示せ (講義: Proposition 3.3.6).