

幾何学 A 演習問題 No.7 問 71–問 83

中レポート課題は問 71, 問 75, 問 76, 問 77.

キーワード: 座標変換, C^∞ -atlas

設定 (問 71 から問 78 まで): 以下, M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. また $\mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ を M の n 次元局所座標系全体の集合とし, $(O, U, \mathbf{u}), (O', V, \mathbf{v}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ とする.

問 71. (中レポート) 座標変換を説明する図を描け.

問 72. $(O, U, \mathbf{u})$ から $(O, U, \mathbf{u})$ (自分自身) への座標変換

$$\tau_{\mathbf{u}\mathbf{u}} : \mathbf{u}(O) \rightarrow \mathbf{u}(O)$$

は恒等写像であることを示せ (講義 Proposition 8.1.3).

問 73. $(O, U, \mathbf{u})$ から $(O', V, \mathbf{v})$ への座標変換

$$\tau_{\mathbf{u}\mathbf{v}} : \mathbf{u}(O \cap O') \rightarrow \mathbf{v}(O \cap O')$$

と $(O', V, \mathbf{v})$ から $(O, U, \mathbf{u})$ への座標変換

$$\tau_{\mathbf{v}\mathbf{u}} : \mathbf{v}(O \cap O') \rightarrow \mathbf{u}(O \cap O')$$

は互いに逆写像であることを示せ (講義 Proposition 8.1.4).

問 74. $(O_1, U_1, \mathbf{u}_1), (O_2, U_2, \mathbf{u}_2), (O_3, U_3, \mathbf{u}_3) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ を固定する. このとき $\mathbf{u}_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ から $\mathbf{u}_3(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ への写像として

$$\tau_{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_3}|_{\mathbf{u}_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)} = (\tau_{\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3}|_{\mathbf{u}_2(O_1 \cap O_2 \cap O_3)}) \circ (\tau_{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2}|_{\mathbf{u}_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)})$$

となることを示せ (講義 Proposition 8.1.5).

問 75. (中レポート) $f \in C(M)$ とする. 以下をそれぞれ示せ (講義 Lemma 8.2.3):

- (1) $f|_{\mathbf{v}(O \cap O')} = f|_{\mathbf{u}(O \cap O')}$ as functions on $\mathbf{v}(O \cap O')$.
- (2) $f|_{\mathbf{v}(O \cap O')} = \tau_{\mathbf{v}\mathbf{u}}^*(f|_{\mathbf{u}(O \cap O')})$ as functions on $\mathbf{v}(O \cap O')$.

問 76. (中レポート) 座標変換 $\tau_{\mathbf{u}\mathbf{v}} : \mathbf{u}(O \cap O') \rightarrow \mathbf{v}(O \cap O')$, $\tau_{\mathbf{v}\mathbf{u}} : \mathbf{v}(O \cap O') \rightarrow \mathbf{u}(O \cap O')$ が共に C^∞ 級写像であるとする. このとき $f \in C(M)$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Theorem 8.2.2):

条件 (i): $f \in C^\infty(M; (O \cap O', \mathbf{u}(O \cap O'), \mathbf{u}|_{O \cap O'}))$.

条件 (ii): $f \in C^\infty(M; (O \cap O', \mathbf{v}(O \cap O'), \mathbf{v}|_{O \cap O'}))$.

問 77. (中レポート) $\mathcal{A}_0$ を M の C^∞ -atlas とする. このとき $C^\infty(M; \mathcal{A}_0)$ が $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数であることを示せ (講義 Proposition 8.3.5).

問 78. $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3\} \subset \mathbb{R}^2$ とする. $(O, U, \mathbf{u}), (O', V, \mathbf{v}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R})$ を

- $O = O' = M$.
- $U = V = \mathbb{R}$.
- $\mathbf{u} : O \rightarrow U, x \mapsto x_1$.
- $\mathbf{v} : O \rightarrow V, x \mapsto x_2$.

このとき座標変換 $\tau_{\mathbf{u}\mathbf{v}}, \tau_{\mathbf{v}\mathbf{u}}$ をそれぞれ求めよ. また $\tau_{\mathbf{u}\mathbf{v}}, \tau_{\mathbf{v}\mathbf{u}}$ が C^∞ 級写像であるか否か論じよ (講義 Example 8.2.1).

設定 (問 79 から問 83 まで): 以下, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とおく. また各 $k = 1, \dots, n+1$ について, $(O_k^\pm, U_k^\pm, \mathbf{u}_k^\pm) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$ を以下のように定める:

- $O_k^+ = \{x \in S^n \mid x_k > 0\}, O_k^- = \{x \in S^n \mid x_k < 0\} \subset S^2$.
- $U_k^\pm = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$.
- $\mathbf{u}_k^\pm : O_k^\pm \rightarrow U_k^\pm, x \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1})$.

また $\mathcal{A}_0 = \{(O_k^+, U_k^+, \mathbf{u}_k^+) \mid k = 1, \dots, n+1\} \cup \{(O_k^-, U_k^-, \mathbf{u}_k^-) \mid k = 1, \dots, n+1\} \subset \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$ とおく.

問 79. 各 $k = 1, \dots, n+1$ について, $\mathbf{u}_k^+, \mathbf{u}_k^-$ の逆写像をそれぞれ求めよ.

問 80. $1 \leq k_1 < k_2 \leq n+1$ とする. $\mathbf{u}_{k_1}^+(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-), \mathbf{u}_{k_2}^-(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-)$ をそれぞれ求めよ. また座標変換

$$\tau_{\mathbf{u}_{k_1}^+ \mathbf{u}_{k_2}^-} : \mathbf{u}_{k_1}^+(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-) \rightarrow \mathbf{u}_{k_2}^-(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-)$$

を求め, C^∞ 級写像であることを示せ (講義 Example 8.1.2, Example 8.2.4 の類題).

問 81. $\mathcal{A}_0$ が S^n の C^∞ -atlas であることを示せ (Example 8.3.6 の一部).

問 82. S^n 上の連続関数 f を

$$f : S^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_1 + x_{n+1}$$

と定める. f が $\mathcal{A}_0$ 上 C^∞ 級であることを示せ (Example 8.3.6 の類題).

問 83. D を $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合であって, $S^n \subset D$ となるものとする. このとき任意の $f \in C^\infty(D)$ について, $f|_{S^n} \in C^\infty(S^n; \mathcal{A}_0)$ であることを示せ (Example 8.3.6 の一般化).