

幾何学 A 演習問題 No.8 問 84–問 99

中レポート課題は問 86, 問 90, 問 91, 問 97.

キーワード: C^∞ -atlas と C^∞ 級関数 (続), 極大 C^∞ -atlas, C^∞ 級多様体

設定 (問 84 から問 92 まで): 以下, M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ を M の C^∞ -atlas とする.

問 84. $(O, U, \mathbf{u}), (O', V, \mathbf{v}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ および $p \in O \cap O'$ を固定する. また座標変換 $\tau_{\mathbf{u}\mathbf{v}}, \tau_{\mathbf{v}\mathbf{u}}$ は共に C^∞ 級写像であるとする. $f \in C(M)$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i): f は $(O, U, \mathbf{u})$ 上 p のまわりで C^∞ 級.

条件 (ii): f は $(O', V, \mathbf{v})$ 上 p のまわりで C^∞ 級.

(講義 Theorem 8.4.2: 7 月 15 日に問題を修正しました).

問 85. $f \in C(M)$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i): f は $\mathcal{A}_0$ 上 C^∞ 級.

条件 (ii): 任意の $p \in M$ について, f は $\mathcal{A}_0$ 上 p のまわりで C^∞ 級.

問 86. (中レポート) $p \in M$ を固定する. $f \in C(M)$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i): f は $\mathcal{A}_0$ 上 p のまわりで C^∞ 級 (i.e. $\forall (O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_0$ with $p \in O$, f は $(O, U, \mathbf{u})$ 上 p で C^∞ 級).

条件 (ii): $\exists (O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_0$ with $p \in O$ such that f は $(O, U, \mathbf{u})$ 上 p のまわりで C^∞ 級.

(講義 Theorem 8.4.4: 7 月 16 日に問題を修正しました)

問 87. (期末試験範囲外) $\mathcal{A}_0 \subset [\mathcal{A}_0]$ となることを示せ (講義 Theorem 9.1.4 (1)).

問 88. (期末試験範囲外) $[\mathcal{A}_0]$ は M の極大 C^∞ -atlas であることを示せ (講義 Theorem 9.1.4 (2)).

問 89. (期末試験範囲外) $\mathcal{A}_0$ を含む M の極大 C^∞ -atlas は $[\mathcal{A}_0]$ に限ることを示せ (講義 Theorem 9.1.4 (3)).

問 90. (中レポート) $\mathcal{B}_0$ を M の C^∞ -atlas とする. このとき以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Theorem 9.1.5):

条件 (i) $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$.

条件 (ii) 任意の $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_0, (O', V, \mathbf{v}) \in \mathcal{B}_0$ について, 座標変換 $\tau_{\mathbf{u}\mathbf{v}}, \tau_{\mathbf{v}\mathbf{u}}$ は共に C^∞ 級写像.

問 91. (中レポート) $C^\infty(M; \mathcal{A}_0) = C^\infty(M; [\mathcal{A}_0])$ が成り立つことを示せ (講義 Theorem 9.2.1).

問 92. (重要度:低) $\mathcal{A}$ を M の極大 C^∞ -atlas とする. $\{f_k\}_{k=1,2,\dots}$ を M 上一様収束する関数列であって, 任意の k について $f_k \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ となるものとする. このとき

$$f_0 : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(p)$$

とおくと $f_0 \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ となることを示せ (解析で学んだ定理などを用いてよい).

設定 (問 93 から問 99 まで): $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし,

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とおく. また $(O_N, V_N, \mathbf{v}_N), (O_S, V_S, \mathbf{v}_S)$ を以下のように定める.

$$O_N := \{x \in S^n \mid x \neq (0, \dots, 0, 1)\} \subset S^n, \quad O_S := \{x \in S^n \mid x \neq (0, \dots, 0, -1)\} \subset S^n,$$

$$V_N = V_S = \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{v}_N : O_N \rightarrow V_N, \quad x \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right), \quad \mathbf{v}_S : O_S \rightarrow V_S, \quad x \mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

さらに $\mathcal{B}_0 := \{(O_N, V_N, \mathbf{v}_N), (O_S, V_S, \mathbf{v}_S)\}$ とおく (7月19日に設定を修正しました).

問 93. $(O_N, V_N, \mathbf{v}_N), (O_S, V_S, \mathbf{v}_S) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$ であることを示せ. また $\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_S$ の逆写像も構成せよ (講義 Example 9.1.6 の準備).

問 94. $\mathcal{B}_0$ が S^n の C^∞ -atlas であることを示せ (講義 Example 9.1.6 の準備).

問 95. $n = 2$ の場合を考える. $(O, U, \mathbf{u}) = (O_3^+, U_3^+, \mathbf{u}_3^+)$ (演習問題 No.7 問 79-83 の設定で定めたもの), $(O', V, \mathbf{v}) = (O_S, V_S, \mathbf{v}_S)$ とおく. 座標変換 $\tau_{\mathbf{u}\mathbf{v}} : \mathbf{u}(O \cap O') \rightarrow \mathbf{v}(O \cap O')$ を求めよ (定義域, 値域も明示的に求めること).

問 96. (期末試験範囲外) 一般の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ について考える. $\mathcal{A}_0$ を演習問題 No.7 問 79-83 の設定で定めた S^n の C^∞ -atlas とする. このとき $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$ を示せ.

問 97. (中レポート) 一般の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ について考える. $\mathcal{A}_0$ を演習問題 No.7 問 79-83 の設定で定めた S^n の C^∞ -atlas とする (7月19日に設定を追記しました).

$$f : S^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1^2$$

とおく. $f \in C^\infty(S^n; [\mathcal{A}_0])$ となることを示せ.

問 98. 「第二可算公理を満たす位相空間の部分集合は相対位相について第二可算公理を満たす」を定式化し, 証明せよ.

問 99. $(S^n, [\mathcal{A}_0])$ が n 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ.