

幾何学 A 演習問題 No.9 問 100–問 111

中レポート課題は問 100, 問 107, 問 110, 問 111.

キーワード: 射影空間

設定: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. また各 $i = 1, \dots, n+1$ について,

- $O_i := \{[x] \in P(\mathbb{R}^{n+1}) \mid x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_i \neq 0\}$,
- $U_i = \mathbb{R}^n$,
- $\mathbf{u}_i : O_i \rightarrow U_i, [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$

とおく.

問 100. (中レポート) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上の二項関係 $\sim$ を, $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ such that } y = \lambda x$$

として定める. この二項関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ.

(講義 Definition 10.1.1)

問 101. (試験範囲外) 商写像 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}^{n+1})$ が開写像であることを示せ (講義 Proposition 10.3.1).

問 102. (試験範囲外) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i x_i^2 = 1\}$ とおく. このとき $\pi(S^n) = P(\mathbb{R}^{n+1})$ となることを示せ. また $P(\mathbb{R}^{n+1})$ がコンパクトであることを示せ (Hint: S^n がコンパクトであることは用いてよい).

問 103. (試験範囲外) X を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係とし, 商写像 $\pi : X \rightarrow X/\sim$ が開写像であるとする. このとき以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 10.3.2):

条件 (i) $\{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$ は $X \times X$ の閉集合.

条件 (ii) $X/\sim$ はハウスドルフ.

問 104. (試験範囲外) X を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係とし, 商写像 $\pi : X \rightarrow X/\sim$ が開写像であるとする. また X が第二可算公理を満たすとする. このとき $X/\sim$ も第二可算公理を満たすことを示せ (講義 Proposition 10.3.3).

問 105. (試験範囲外) $P(\mathbb{R}^{n+1})$ がコンパクトハウスドルフで, 第二可算公理を満たすことを示せ (講義 Proposition 10.1.3).

問 106. 写像

$$P(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \{\mathbb{R}^{n+1} \text{ の一次元部分空間 } \}, [x] \mapsto [x] \cup \{0\}$$

は well-defined で全単射であることを示せ (講義 Proposition 10.1.4).

問 107. (中レポート) $i = 1, \dots, n+1$ とする. $(O_i, U_i, \mathbf{u}_i) \in \mathcal{LC}(P(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{R}^n)$ となることを示したい (講義 Example 10.2.1). 何をチェックする必要があるか, チェック項目を述べよ.

問 108. $i = 1, \dots, n+1$ とする. $(O_i, U_i, \mathbf{u}_i) \in \mathcal{LC}(P(\mathbb{R}^{n+1}); \mathbb{R}^n)$ となることを示せ (講義 Example 10.2.1).

問 109. $\mathcal{A}_0 := \{(O_i, U_i, \mathbf{u}_i) \mid i = 1, \dots, n+1\}$ が $P(\mathbb{R}^{n+1})$ の C^∞ -atlas であることを示せ (講義 Proposition 10.2.2).

問 110. (中レポート)

$$f : P(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}, [x] = [x_1 : x_2] \mapsto \frac{x_1^2 + 2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

が well-defined であることを示せ (講義 Example 10.2.3 の類題).

問 111. (中レポート) 上記 f について, $f \in C^\infty(P(\mathbb{R}^2); [\mathcal{A}_0])$ であることを示せ (講義 Example 10.2.3 の類題).