2021 年度前期 幾何学 A 期末試験 問 1–問 15; 150 点満点 (8/4 実施)

- この試験は「持ち込み可」「ネット検索等可」「Mathematica 等のソフトウェアの活用可」ですが「相談禁止 (友人知人, ネット掲示板など含む)」です.

$\boxed{1}$ (30 点満点)

以下, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする.

以下の各種定義の説明について, 説明として誤りがある場合にはそれぞれ正しく修正した説明を述べよ (修正した箇所に印または説明をつけること), また誤りがない場合には「誤りはない」と明記せよ.

問 1. (10 点) **連続関数の和:** $f, g \in C(M)$ について, それらの和 $f + g \in C(M)$ は

$$f + g : M \to \mathbb{R},\ x + y \mapsto f(x) + g(y)$$

として定義される.

問 2. (10 点) **多様体上の C^∞ 級関数:** $f \in C(M)$ が $\mathcal{A}$ 上 C^∞ 級であるとは, 任意の $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$ について,

$$f_{\boldsymbol{u}} : U \to \mathbb{R},\ u \mapsto f(\boldsymbol{u}^{-1}(u))$$

が U 上 C^∞ 級であること (U は $\mathbb{R}^n$ の開集合).

問 3. (10 点) **多様体上の接空間:** $p \in M$ とする.

$$T_pM := \{\eta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \eta(f \cdot g) = \eta(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \eta(g) \text{ for any } f, g \in \mathbb{R}^n\}$$

を $(M, \mathcal{A})$ の $p \in M$ における接空間という.

$\boxed{2}$ (30 点満点)

以下, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M_1, \mathcal{A}_1)$, $(M_2, \mathcal{A}_2)$ をそれぞれ n_1 次元 C^∞ 級多様体, n_2 次元 C^∞ 級多様体とする. また $\varphi : M_1 \to M_2$ を C^∞ 級写像とする.

問 4. (10 点) $\eta \in T_p M_1$ とする. 線型写像

$$\eta \circ \varphi^* : C^\infty(M_2; \mathcal{A}_2) \to \mathbb{R}$$

について考える. $\eta \circ \varphi^*$ が接空間 $T_{\varphi(p)} M_2$ の元である (i.e. $\eta \circ \varphi^*$ が $\varphi(p)$ における $(M_2, \mathcal{A}_2)$ 上の接ベクトルである) ことを示せ. ただし,

$$\varphi^* : C^\infty(M_2; \mathcal{A}_2) \to C^\infty(M_1; \mathcal{A}_1),\ f \mapsto f \circ \varphi$$

が $\mathbb{R}$ 代数準同型であることは認めてよい.

問 5. (10 点) 写像

$$(d\varphi)_p : T_p M_1 \to T_{\varphi(p)} M_2,\ \eta \mapsto \eta \circ \varphi^*$$

が和を保つことを示せ.

問 6. (10 点)

以下, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M_1, \mathcal{A}_1)$, $(M_2, \mathcal{A}_2)$, $(M_3, \mathcal{A}_3)$ をそれぞれ n_1 次元 C^∞ 級多様体, n_2 次元 C^∞ 級多様体, n_3 次元 C^∞ 級多様体とする. また $\varphi : M_1 \to M_2$, $\psi : M_2 \to M_3$ を C^∞ 級写像とし, $p \in M_1$ とする.

以下,

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \text{ as } C^\infty(M_3; \mathcal{A}_3) \to C^\infty(M_1; \mathcal{A}_1)$$

が成り立つことは認めてよいとする.

下の議論は等式

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p \text{ as } T_pM_1 \to T_{(\psi\circ\varphi)(p)}M_3$$

の証明のつもりであるが, 数か所の不備がある. 適切に修正した議論を書き, 修正した箇所に印または説明をつけること.

議論: $f \in C^\infty(M_1; \mathcal{A}_1)$ を任意にとる. 以下を示せばよい:

$$\boxed{\text{示すこと}}\ (d(\psi \circ \varphi))_p(f) = ((d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p)(f).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (d(\psi \circ \varphi))_p(f) \\
&= f \circ (\psi \circ \varphi)^* \quad (\because \text{全微分の定義}) \\
&= f \circ (\varphi^* \circ \psi^*) \quad (\because \text{上の注意}) \\
&= (f \circ \varphi^*) \circ \psi^* \quad (\because \text{写像の合成についての結合律}) \\
&= (d\varphi)_p(f) \circ \psi^* \quad (\because \text{全微分の定義}) \\
&= (d\psi)_{\varphi(p)}((d\varphi)_p(f)) \quad (\because \text{全微分の定義}) \\
&= ((d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p)(f) \quad (\because \text{合成写像の定義}) \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ (40 点満点)

問 7. (5 点) 多様体論における座標変換の概念を説明する絵を描け.

$P(\mathbb{R}^4)$ を三次元射影空間とする. $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v})$ をそれぞれ

- $O := \{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in P(\mathbb{R}^4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq 0\}$, $U := \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{u} : O \to U,\ [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}\right),$$

- $O' := \{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in P(\mathbb{R}^4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ x_2 \neq 0\}$, $V := \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{v} : O' \to V,\ [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_4}{x_2}\right)$$

と定める.

問 8. (5 点) $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(P(\mathbb{R}^4); \mathbb{R}^3)$ を示したい場合, 何を確認する必要があるか説明せよ.

以下, $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{LC}(P(\mathbb{R}^4); \mathbb{R}^3)$ を認めてよい. また $\boldsymbol{u} : O \to U$ の逆写像が

$$\boldsymbol{u}^{-1} : U \to O,\ u = (u_1, u_2, u_3) \mapsto [1 : u_1 : u_2 : u_3]$$

であることも認めてよい.

問 9. (10 点) $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O', V, \boldsymbol{v})$ への座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ を求めよ. 定義域と値域も具体的に求めること.

問 10. (10 点) $P(\mathbb{R}^4)$ 上の関数 f を

$$f : P(\mathbb{R}^4) \to \mathbb{R},\ [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \mapsto \frac{2x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

と定める. f が well-defined であることは認めてよい. U 上の関数 $f_{\boldsymbol{u}}$ を求めよ.

問 11. (10 点) 問 10 の設定で考える. 下の議論は $f_{\boldsymbol{u}}$ が U 上の C^∞ 級関数であることの証明のつもりである.

議論: $f_{\boldsymbol{u}} = (f|_O) \circ (\boldsymbol{u}^{-1})$ である.

$$f|_O : O \to \mathbb{R},\ [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \mapsto \frac{2x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

であり, 特に $f|_O$ は有理関数であるから C^∞ 級. また

$$\boldsymbol{u}^{-1} : U \to O,\ u \mapsto [1 : u_1 : u_2 : u_3]$$

も各成分が多項式なので C^∞ 級. 従って C^∞ 級同士の合成である $f_{\boldsymbol{u}} = (f|_O) \circ (\boldsymbol{u}^{-1})$ も C^∞ 級.

(議論終わり)

この議論に証明としての不備がない場合は「不備はない」と明記せよ.

不備がある場合には, 改めて証明として成立する議論を書け (“修正” に拘らなくてもよい). ただし以下の命題は認めてよい:

- ユークリッド空間上で定義された多項式関数は C^∞ 級.
- ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 上定義された C^∞ 級関数 h_1, h_2 について, h_2 が $\mathbb{R}^3$ 上零点を持たないとする. このとき関数

  $$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{h_1(x)}{h_2(x)}$$

  は $\mathbb{R}^4$ 上 well-defined で C^∞ 級.

$\boxed{5}$ (50 点満点)

以下, C^∞ 級写像

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$$

について考える.

問 12. (10 点) $q = 1 \in \varphi(\mathbb{R}^3)$ が φ の正則値であることを示せ.

問 13. (10 点) $q = 0 \in \varphi(\mathbb{R}^3)$ が φ の正則値ではないことを示せ (Hint: $p = (0,0,0) \in \varphi^{-1}(\{0\})$ を考える).

以下, $q = 1$ の場合を考える.

$$N := \varphi^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

を $\mathbb{R}^3$ の閉正則部分多様体とみなす.

問 14. (10 点) $\iota : N \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする. 各 $p = (p_1, p_2, p_3) \in N$ について,

$$T_p\mathbb{R}^3 = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \middle| \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

の線型部分空間 $(d\iota)_p(T_pN)$ を決定せよ.

問 15. (20 点) C^∞ 級写像

$$\phi : N \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

について考える. N の元 $p = (p_1, p_2, p_3)$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i): $(d\phi)_p : T_pN \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}$ が全射にならない.

条件 (ii): $p_3 = 0$.

(Hint: C^∞ 級写像

$$\tilde{\phi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

について, $\tilde{\phi} \circ \iota = \phi$ であることを用いる).