

幾何学 A 大レポート課題 問 1-16

キーワード: 多変数関数の微分論の代数化, 可微分多様体.

設定: 大レポート課題全体を通じて $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合とする. また M を位相空間とし, $\mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ を M の n 次元局所座標系全体のなす集合とする.

1 (10 点満点)

問 1. (5 点) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. 関数

$$f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$$

について, f の k 階導関数

$$f^{(k)} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

を求めよ (結論のみでよい).

問 2. (5 点) 関数

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$$

について, h が C^∞ 級関数でないことの理由を簡潔に述べよ.

[2] (45 点満点) 以下の定義達はそれぞれ誤りがある。それぞれ正しく修正したものを述べよ (修正版を書いたうえで、修正した箇所に印または説明をつけること).

問 3. (5 点) 写像 $\Psi : C(U_2) \rightarrow C(U_1)$ が線型であるとは、任意の $f \in C(U_2)$, $x, y \in U_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について

- $(\Psi(f))(x+y) = (\Psi(f))(x) + (\Psi(f))(y)$ および
- $(\Psi(f))(\lambda x) = \lambda(\Psi(f))(x)$

が成り立つこと.

問 4. (5 点) 各 $p \in U$ について

$$T_p U = \{\eta \in \mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R}) \mid \eta(f \cdot g) = \eta(f) \cdot g + f \cdot \eta(g) \text{ for any } f, g \in C^\infty(U)\}$$

を U の p における接空間という.

問 5. (5 点) 写像 $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ が C^∞ 級であるとは,

$$\varphi^*(C^\infty(U_1)) \subset C^\infty(U_2)$$

となること.

問 6. (5 点) C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ および点 $p \in U_1$ について,

$$(d\varphi)_p : C^\infty(U_1) \rightarrow C^\infty(U_2), \eta \mapsto \eta \circ \varphi^*$$

を φ の p における全微分という.

問 7. (5 点) (O, U, \mathbf{u}) が M の n 次元局所座標系であるとは、以下を満たすこと:

- O が M の部分集合,
- U が \mathbb{R}^n の部分集合,
- $\mathbf{u} : O \rightarrow U$ が同相写像 (ただし O, U の位相はそれぞれ相対位相として定める).

問 8. (5 点) $(O, U, \mathbf{u}), (O', V, \mathbf{v}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ について,

$$\tau_{\mathbf{uv}} : O \cap O' \rightarrow O \cap O', u \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{u}^{-1}(u))$$

を (O, U, \mathbf{u}) から (O', V, \mathbf{v}) への座標変換という.

問 9. (5 点) $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ が M の C^∞ -atlas であるとは、以下を満たすこと:

- $\bigcup_{(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_0} O = M$,
- 任意の $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_0$ について

$$\mathbf{u} : O \rightarrow U$$

が C^∞ 級写像.

問 10. (5 点) \mathcal{A}_0 を M の C^∞ -atlas とする。 $f \in C(M)$ が \mathcal{A}_0 上 C^∞ 級であるとは、任意の $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_0$ について、 $f_{\mathbf{u}} \in C^\infty(O)$ となること.

問 11. (5 点) $\mathcal{A} \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ とする。組 (M, \mathcal{A}) が n 次元 C^∞ 級多様体であるとは、 M がハウスドルフかつ第二可算公理を満たすこと.

3 (20 点満点)

問 12. (10 点) $f_1, f_2 \in C^\infty(U_2)$ とし, 連続写像 $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$, 点 $p \in U_1$ を固定する. このとき等式

$$(\varphi^*(f_1 + f_2))(p) = (\varphi^*(f_1) + \varphi^*(f_2))(p)$$

の証明として, 以下の議論には数か所の不備がある. 適切に修正したものと述べよ (修正版を書いたうえで, 修正した箇所に印または説明をつけること).

議論:

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (\varphi^*(f_1 + f_2))(p) \\ &= (f_1 + f_2)(\varphi(p)) \quad (\because \varphi^* \text{の定義}) \\ &= f_1(\varphi(p)) + f_2(\varphi(p)) \quad (\because f_1, f_2 \text{の線型性}) \\ &= (\varphi^*(f_1))(p) + (\varphi^*(f_2))(p) \quad (\because \varphi^* \text{の定義}) \\ &= (\varphi^*(f_1) + \varphi^*(f_2))(p) \quad (\because \varphi^*(f_1), \varphi^*(f_2) \text{ の線型性}) \\ &= \text{右辺}. \end{aligned}$$

問 13. (10 点) $p \in U_1$, $\eta_1, \eta_2 \in T_p U_1$ とし, C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ を固定する. このとき等式

$$(d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2) = (d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2)$$

の証明として, 以下の議論には数か所の不備がある. 適切に修正したものと述べよ (修正版を書いたうえで, 修正した箇所に印または説明をつけること).

議論: $f \in C^\infty(U_2)$ を任意にとる. 以下を示せばよい:

示すこと $((d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2))(f) = ((d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2))(f)$.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= ((d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2))(f) \\ &= ((\eta_1 + \eta_2) \circ \varphi^*)(f) \quad (\because \text{全微分の定義}) \\ &= (\eta_1 + \eta_2) \circ (\varphi^*(f)) \\ &= (\eta_1 \circ (\varphi^*(f))) + (\eta_2 \circ (\varphi^*(f))) \quad (\because \text{汎関数の和の定義}) \\ &= (\eta_1 \circ \varphi^*)(f) + (\eta_2 \circ \varphi^*)(f) \\ &= ((d\varphi)_p(\eta_1))(f) + ((d\varphi)_p(\eta_2))(f) \quad (\because \text{全微分の定義}) \\ &= ((d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2))(f) \quad (\because \text{汎関数の和の定義}) \\ &= \text{右辺}. \end{aligned}$$

4 (25 点満点)

以下, $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ とおく. また $(O_1^+, U_1^+, \mathbf{u}_1^+), (O_1^-, U_1^-, \mathbf{u}_1^-), (O_2^+, U_2^+, \mathbf{u}_2^+), (O_2^-, U_2^-, \mathbf{u}_2^-) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^2)$ を以下のように定める:

- $O_1^+ = \{x \in M \mid x_1 > 0\}, U_1^+ = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 < 1\}, \mathbf{u}_1^+ : O_1^+ \rightarrow U_1^+, x \mapsto (x_2, x_3).$
- $O_1^- = \{x \in M \mid x_1 < 0\}, U_1^- = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 < 1\}, \mathbf{u}_1^- : O_1^- \rightarrow U_1^-, x \mapsto (x_2, x_3).$
- $O_2^+ = \{x \in M \mid x_2 > 0\}, U_2^+ = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 < 1\}, \mathbf{u}_2^+ : O_2^+ \rightarrow U_2^+, x \mapsto (x_1, x_3).$
- $O_2^- = \{x \in M \mid x_2 < 0\}, U_2^- = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 < 1\}, \mathbf{u}_2^- : O_2^- \rightarrow U_2^-, x \mapsto (x_1, x_3).$

また

$$\mathcal{A}_0 = \{(O_1^+, U_1^+, \mathbf{u}_1^+), (O_1^-, U_1^-, \mathbf{u}_1^-), (O_2^+, U_2^+, \mathbf{u}_2^+), (O_2^-, U_2^-, \mathbf{u}_2^-)\} \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^2)$$

とおく.

問 14. (5 点) M の絵を描け.

問 15. (10 点) このとき

$$O_1^+ \cup O_1^- \cup O_2^+ \cup O_2^- = M$$

となることを示せ.

問 16. (10 点) $(O, U, \mathbf{u}) = (O_1^-, U_1^-, \mathbf{u}_1^-), (O', V, \mathbf{v}) = (O_2^+, U_2^+, \mathbf{u}_2^+)$ とおく. このとき座標変換 $\tau_{\mathbf{uv}}$ を求めよ (定義域, 値域もそれぞれ明示的に求ること).