幾何学 A 期末試験対策問題

- 期末試験は「持ち込み可」「ネット検索等可」「Mathematica 等のソフトウェアの活用可」ですが「相談禁止 (友人知人, ネット掲示板など含む)」です.
- 期末試験は 150 点満点の予定です (期末試験の点数と成績の関係についてはガイダンス資料を見てください).

$\boxed{1}$

以下, $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M, \mathcal{A})$, $(M_1, \mathcal{A}_1)$, $(M_2, \mathcal{A}_2)$ をそれぞれ n 次元 C^∞ 級多様体, n_1 次元 C^∞ 級多様体, n_2 次元 C^∞ 級多様体とする.

以下の定義達はそれぞれ誤りがある. 正しく修正したものを述べよ (修正した箇所に印または説明をつけること).

問 1. $f, g \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ について, それらの和 $f+g \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ は各 $x, y \in M$ について, $(f+g)(x+y) := f(x) + g(y)$ として定義される.

問 2. $p \in M$ とする.

$$T_pM := \{\eta \in \mathcal{L}(C^\infty(M; \mathcal{A}), \mathbb{R}) \mid \eta(f \cdot g) = \eta(f) \cdot g + f \cdot \eta(g) \text{ for any } f, g \in C^\infty(M; \mathcal{A})\}$$

を $(M, \mathcal{A})$ の $p \in M$ における接空間という.

問 3. $\varphi : M_1 \to M_2$ を $(M_1, \mathcal{A}_1)$ から $(M_2, \mathcal{A}_2)$ への C^∞ 級写像であるとする. また $p \in M_1$ とする. このとき

$$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2,\ \eta \mapsto \varphi^* \circ \eta$$

を φ の $p \in M_1$ における全微分とよぶ.

$\boxed{2}$

問 4. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする. また $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$ とし, $f, g \in C^\infty(M; (O, U, \boldsymbol{u}))$ とする. このとき等式

$$(f \cdot g) \circ \boldsymbol{u}^{-1} = (f \circ \boldsymbol{u}^{-1}) \cdot (g \circ \boldsymbol{u}^{-1})$$

の証明として, 以下の議論には数か所の不備がある. 適切に修正したものを述べよ (修正した箇所に印または説明をつけること).

議論: $u \in U$ を任意にとる. 以下を示せばよい:

$$\boxed{\text{示すこと}}\ ((f \cdot g) \circ \boldsymbol{u}^{-1})(u) = ((f \circ \boldsymbol{u}^{-1}) \cdot (g \circ \boldsymbol{u}^{-1}))(u)$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (f(u) \cdot g(u))(\boldsymbol{u}^{-1}(u)) \quad (\because \text{写像の合成の定義}) \\
&= (f(u) \circ \boldsymbol{u}^{-1}(u)) \cdot (g(u) \circ \boldsymbol{u}^{-1}(u)) \quad (\because \text{関数の各点ごとの積の定義}) \\
&= ((f \circ \boldsymbol{u}^{-1})(u)) \cdot ((g \circ \boldsymbol{u}^{-1})(u)) \quad (\because \text{写像の合成の定義}) \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

以下, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M_1, \mathcal{A}_1)$, $(M_2, \mathcal{A}_2)$ $(M_3, \mathcal{A}_3)$ をそれぞれ n_1 次元 C^∞ 級多様体, n_2 次元 C^∞ 級多様体, n_3 次元 C^∞ 級多様体とする. また $\varphi : M_1 \to M_2$, $\psi : M_2 \to M_3$ をそれぞれ C^∞ 級写像とする.

問 5. $C(M_3)$ から $C(M_1)$ への写像の等式

$$(\psi \circ \varphi)^* = (\varphi^* \circ \psi^*)$$

が成り立つことを示せ.

問 6. $p \in M_1$ とする. このとき等式

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{4}$

問 7. 座標変換を説明する絵を描け.

以下, $P(\mathbb{R}^4)$ を三次元射影空間とする. また $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v})$ をそれぞれ

- $O := \{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in P(\mathbb{R}^4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq 0\}$, $U := \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{u} : O \to U,\ [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}\right),$$

- $O' := \{[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in P(\mathbb{R}^4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R},\ x_2 \neq 0\}$, $V := \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{v} : O' \to V,\ [x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_4}{x_2}\right)$$

と定める.

問 8.

$$\phi : U \to O,\ u = (u_1, u_2, u_3) \mapsto [1 : u_1 : u_2 : u_3]$$

とおく. このとき $\phi \circ \boldsymbol{u} = \mathrm{id}_O$ となることを示せ.

問 9. 以下, $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{LC}(P(\mathbb{R}^4); \mathbb{R}^3)$ を認めてよい. $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O', V, \boldsymbol{v})$ への座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ を求めよ. 定義域と値域も具体的に求めること.

$\boxed{5}$

以下, C^∞ 級写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ について考える. $q := 1 \in \mathbb{R}$ とおく. また

$$N := \varphi^{-1}(\{q\}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

とおく.

問 10. N の絵を描け.

問 11. $q = 1$ が φ の正則値であることを示せ.

以下, N を $\mathbb{R}^3$ の 2 次元閉正則部分多様体とみなす.

問 12. $\iota : N \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする. $T_p\mathbb{R}^3$ の部分空間 $(d\iota)_p(T_pN)$ を決定せよ.

問 13. C^∞ 級写像

$$\phi : N \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

について, $(d\phi)_p : T_pN \to T_{\phi(p)}\mathbb{R}$ が全射にならないような点 $p \in N$ をすべて求めよ. (Hint: C^∞ 級写像

$$\tilde{\phi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

について, $\tilde{\phi} \circ \iota = \phi$ であることを用いる).