

当面の目標

7次元体上の π -YLR 場

§1 : 7次元体論の復習

§2 : 一次微分形式

§3 : π -YLR 場

● §4 : ベクトル空間の π -YLR 積

§5 : 隆起関数の復習

§6 : π -YLR 場の切断表示

§ 4 : ベクトル空間のデカルト積

有限次元ベクトル空間のデカルト積

の基本的性質を紹介する。

§ 4.1 : 双対空間

設定 : V : 有限次元ベクトル空間/ $\mathbb{R}$

Def 4.1.1 : $V^V := \{ f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{線型} \}$
 $\ni V$ の双対空間 と呼ぶ

Prop 4.1.2 : V^V は $\text{Map}(V, \mathbb{R})$ の線型部分空間

Thm 4.1.3 :

★レポート

$B = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq V$ の基底 に対し.

$\exists$ のと 各 $j = 1, \dots, n$ について

$$e_j^V : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v = \sum_i a_i e_i \mapsto a_j$$

と定めた

$B^V := \{e_1^V, \dots, e_n^V\}$ は V^V の基底 である.

↑

V^V の B に対応する 双対基底

特に $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V^V$

④ 再帰性

V^V の双対空間 $(V^V)^V$ を考えよう.

Thm 4.1.4

★ レポート

$V \simeq (V^V)^V$ は自然に同型である.

任意の $v \in V$ について

$$\phi_v : V^V \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(v) \text{ である}$$

$$\phi_v \in (V^V)^V \text{ である},$$

$$\underbrace{\phi : V \rightarrow (V^V)^V, v \mapsto \phi_v}_{\sim} \text{ は線型同型}$$

ϕ の定義に基底は使っていない

Hint: 同型の証明は " ϕ の単射性"

+ 次元の比較

Remark 4.1.5:

V と V^V は 線型同型 である

“基底 e_i と δ_j ” により 同型写像 を 作れる。

証明

圏論を知り、その人同様の説明:

$\mathbf{FVect}_{\mathbb{R}}$: 有限次元ベクトル空間と線型写像の圏である。

• $V \mapsto V^V \quad \gamma: V \rightarrow W \mapsto \gamma^V: W^V \rightarrow V^V, f \mapsto f \circ \gamma$

は 反変関手 $V: \mathbf{FVect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{FVect}_{\mathbb{R}}$ である。

(恒等関手 id は
自然同型 $\tau_{V,V}$)

• $V \circ V: \mathbf{FVect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{FVect}_{\mathbb{R}}$ は 恒等関手と自然同型

追記

Ex 4.1.6 : 双対基底の例.

$M : m\text{-mfd}$, $p \in M$, $(O, U, u) \in A$ with $p \in O \cong \text{fix}$

$(\frac{\partial}{\partial u_i})_p)_{i=1, \dots, m}$ は $T_p M$ の基底 (座標基底) である.

各 i に対して $u_i : O \rightarrow \mathbb{R}$, $q \mapsto (u(q))_i$ とおく.

u_i の p における全微分は $(du_i)_p : T_p M \cong T_p O \rightarrow T_{u_i(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ とみられる.

このとき 各 j に対して

$$(du_i)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial u_j} \right)_p \right) = \delta_{ij} \quad (\text{クロネッカーのデルタ}) \text{ とおける.}$$

これより $((du_i)_p)_{i=1, \dots, m}$ は $T_p M$ の $((\frac{\partial}{\partial u_i})_p)_{i=1, \dots, m}$ に対する双対基底
すなわち $((\frac{\partial}{\partial u_i})_p)_{i=1, \dots, m}$ の双対基底

§ 4.2 : τ - γ 積

設定 : I : 有限集合

$\{V_i\}_{i \in I}$: 有限次元ベクトル空間の有限族

Def 4.2.1 : $\{V_i^V\}_{i \in I}$ の直積 $\prod_{i \in I} V_i^V$ へは $\mathbb{R}^1$ の
多重線型写像の全体 $\mathcal{L}$ の集合 $\mathcal{L}$

$$\bigotimes_{i \in I} V_i \quad \text{と 書く.}$$

$\{V_i\}_{i \in I}$ の τ - γ 積空間

Prop 4.2.2 :

$\bigotimes_{i \in I} V_i$ は $\text{Map}(\prod_{i \in I} V_i^V, \mathbb{R})$ の 線型部分空間

★レポート

Prop 4.2.3 : 各 $(v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i$ について

★ レポート

$$\bigotimes_{i \in I} v_i : \prod_{i \in I} V_i^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f_i)_{i \in I} \mapsto \prod_{i \in I} f_i(v_i)$$

は 多重線型. 特に $\bigotimes_{i \in I} v_i \in \bigotimes_{i \in I} V_i$

Prop 4.2.4 : $\bigotimes : \prod_{i \in I} V_i \rightarrow \bigotimes_{i \in I} V_i, \quad (v_i)_{i \in I} \mapsto \bigotimes_{i \in I} v_i$

★ レポート

は 多重線型.

Thm 4.2.5 :

★ 逆射

各 $i \in I$ に対し V_i の基底 $B_i = \{e_i^1, \dots, e_i^{n_i}\}$ を固定可
($n_i := \dim V_i$)

さて

$$\bigotimes_{i=1}^n B_i = \{ \bigotimes_{i \in I} e_{k_i}^i \mid k_i \in \{1, \dots, n_i\} (i \in I) \}$$

は $\bigotimes_{i \in I} V_i$ の基底.

$$\text{つまり } \dim \bigotimes_{i \in I} V_i = \prod_{i \in I} \dim V_i$$

Thm 4.2.5 の Hint : 各 $i \in I$ について

$B_i^V \subseteq V_i^V$ の B_i について の 双対基底 と 可.

この 2 つ 以下 で 成り立つ

Lemma 4.2.6

$$\bigotimes_{i \in I} V_i \overset{\text{線型同型}}{\simeq} \text{Map} \left(\prod_{i \in I} B_i^V, \mathbb{R} \right)$$

$$\alpha \longmapsto \alpha|_{\prod_{i \in I} B_i^V}$$

$$\prod_{i \in I} V_i \rightarrow \mathbb{R}$$

Remark 4.2.7 :

$$\otimes : \prod_{i \in I} V_i \rightarrow \otimes_{i \in I} V_i, \quad (v_i)_{i \in I} \mapsto \otimes_{i \in I} v_i$$

∵ $\otimes_{i \in I} V_i$ は $\otimes_{i \in I} V_i$ への全射ではない！

(子空間に還元される...)

Prop 4.2.8 $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ の標準基底と可.

★ 証明

$$\{e_1, e_2\} \quad e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \quad \text{is not}$$

$$\exists \{u, w\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{s.t.}$$

$$e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 = u \otimes w$$

$\gamma = \gamma$ の普遍性 :

Thm 4.2.9 : $\forall U : \text{ベクトル空間} / \mathbb{R}$

★レポート

$\forall \gamma : \prod_{i \in I} V_i \rightarrow U : \text{多重線型}$

$\exists! \varphi : \bigotimes_{i \in I} V_i \rightarrow U : \text{線型 s.t.} \quad \varphi \circ \otimes = \gamma$

$$\left(\begin{array}{ccc} \text{図式:} & \prod_{i \in I} V_i & \xrightarrow{\otimes} \bigotimes_{i \in I} V_i \\ & \searrow \gamma & \downarrow \exists! \varphi \\ & U & \end{array} \right)$$

難点意味: " $\otimes$ " は $\prod_{i \in I} V_i$ から多重線型子集の中へ一番入る!

Thm 4.2.9 a Hint: Thm 4.2.5 を用いて.

各種テンソル積

Remark 4.2.10: $I = \emptyset$ かつ $\bigotimes_{i \in I} V_i = \text{Map}(\{\emptyset\}, \mathbb{R})$
 $\cong \mathbb{R}$ である。

Remark 4.2.11: $\#I = 1$ かつ $\{V_i\}_{i \in I} = \{V\}$ とすると、

つまり $\bigotimes_{i \in I} V_i = \{V^V \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{線型}\}$
 $= (V^V)^V \cong V$
再帰性

Remark 4.2.12: V, W : 有限次元 $\mathbb{R}$ -ベクトル空間 V, W である。

(i) $V^* \otimes V^*$ は $\{B : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{双線型}\}$ と
自然に線型同型

(ii) $V^* \otimes W$ は $\{f : V \rightarrow W \mid \text{線型}\}$ と
自然に線型同型

(ii) について: 各 $f : V \rightarrow W$ (線型) に対応

$$\alpha_f : V \times W^* \rightarrow \mathbb{R}, (v, h) \mapsto h(f(v)) \text{ である.}$$

$W^* = (V^*)^*$

Prop 4.2.13: (i) α_f は双線型

逆写像

(ii) $\{f : V \rightarrow W \mid \text{線型}\} \rightarrow V^* \otimes W, f \mapsto \alpha_f$ は線型同型

双対と $\tau = \gamma$ の積

Thm 4.2.14 : V_1, V_2 は有限次元 $\mathbb{K}$ 上の空間 / $\mathbb{R}$ と可也.

★レポート

このとき $(V_1 \otimes V_2)^V$ は $V_1^V \otimes V_2^V$ と自然に線型同型

$\tau = \gamma$ の積の結合性

Thm 4.2.15

★レポート

V_1, V_2, V_3 は有限次元 $\mathbb{K}$ 上の空間 / $\mathbb{R}$ と可也.

$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ や $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ は

$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 = \bigotimes_{i=1}^3 V_i$ と自然に線型同型.