当面の目標

多様体上のテンソル場

§1 : 多様体論の復習

§2 : 一次微分形式

§3 : テンソル場

§4 : ベクトル空間のテンソル積

§5 : 隆起関数の復習

§6 : テンソル場の切断表示

§5：隆起関数の復習

テンソル積の切断表示（解析的定義）

の準備として

- 多様体上の隆起関数

- 関数の延長

の基礎知識をまとめておく.

§5.1 : 隆起関数とCut-off関数

設定 : M : m-mfd

Def 5.1.1 : 各関数 $f : M \to \mathbb{R}$ について

$$\underset{\text{support of } f}{\underbrace{\operatorname{supp} f}} := \overline{\{ x \in M \mid f(x) \neq 0 \}} \subset M$$

Mにおける閉包

Def 5.1.2.

$$C_c(M) := \{ f \in C(M) \mid \mathrm{supp}\, f \text{ がコンパクト} \}$$

連続

$$C_c^\infty(M) := C_c(M) \cap C^\infty(M)$$

$C_c(M)$ の元を M 上の隆起関数という.

Prop 5.1.3 : $C_c(M)$ は $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数 (和, スカラー倍, 積で閉じる)

$C_c^\infty(M)$ は $C^\infty(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

(ただし単位的とは限らない)

定数関数の support は M

≠○

問：ゼロでない C^∞ 級隆起関数は存在するか？

$M = \mathbb{R}$ の場合でも自明ではない

Remark：ゼロでない整関数（$\mathbb{C}$ 全域で定義されている正則関数）

の support は $\mathbb{C}$ と一致

（Liouville の定理）

答：存在する！しかも cut-off 関数が存在する！

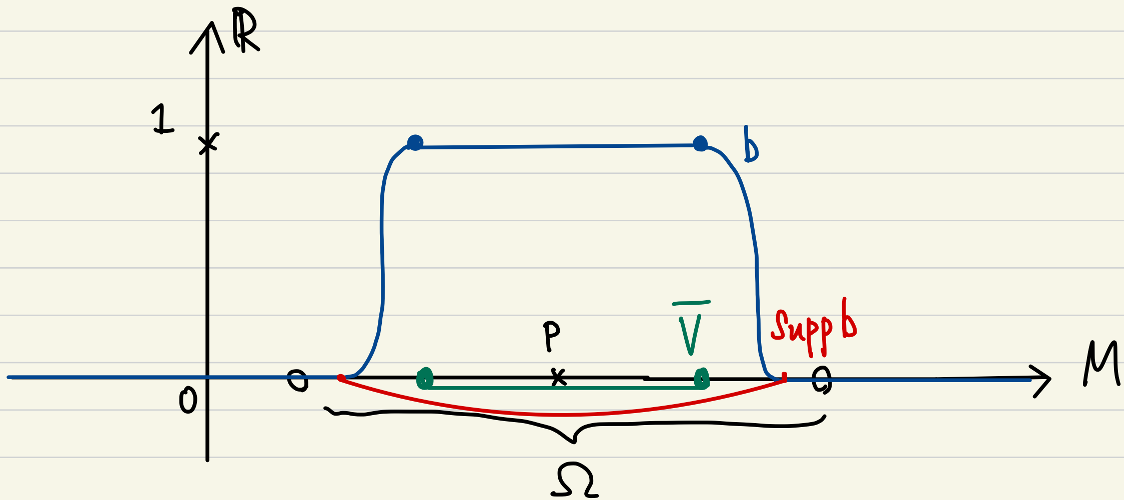
（C^∞ は意外とやわらかい）

Def 5.1.4 : $p \in M$, Ω : p の開近傍 (in M) とする.

$b \in C_c(M)$ が (p, Ω) の cut-off 関数

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$$\begin{cases} 0 \leq b(x) \leq 1 \quad ({}^\forall x \in M), \\ \operatorname{supp} b \subset \Omega \quad \text{and} \\ {}^\exists V : p \text{ の開近傍 s.t. } b|_V \equiv 1. \end{cases}$$

$(\rightsquigarrow V \subset \operatorname{supp} b \subset \Omega)$



ℝ
1
b
P
$\overline{V}$
supp b
M
0
Ω

Theorem 5.1.5

$\forall p \in M$, $\forall \Omega$: pの開近傍 in M

$\exists b \in C_c^\infty(M)$ s.t. b は (p, Ω) の cut-off 関数

Proof of Thm 5.1.5 (講義では省略)

Step 1 : $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ の場合

Step 2 : 一般の場合

Step 1 : $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ の場合

Lemma 5.1.6 : $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$

は $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級

各 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して, $U_r(0;\mathbb{R}^n) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r \}$ とおく.

Prop 5.1.7 : $\forall r \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists b \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ s.t.

b は $(0, U_r(0;\mathbb{R}^n))$ の cut-off 関数

$$b(x) := \frac{\rho(r - \|x\|)}{\rho(\|x\| - \frac{1}{2}r) + \rho(r - \|x\|)}, \quad V := U_{\frac{1}{2}r}(0;\mathbb{R}^n) \text{ とすれば ok}$$

Step 2：一般の場合：$p \in M$，Ω：p の開近傍 in M を fix.

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ であって以下を満たすものをとる

（$\mathcal{A}$ の極大性からそのようなものがとれる）

$$
\begin{cases}
p \in O \subset \Omega \\
u(p) = 0 \\
U_1(0; \mathbb{R}^n) \subset U
\end{cases}
$$

Prop 5.1.7 より $(0, U_1(0; \mathbb{R}^n))$ の cut-off 関数 $b_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ がとれる.

$b : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} b_0(u(x)) & (x \in O) \\ 0 & (x \notin O) \end{cases}$ とおく.

(主) $b \in C_c^\infty(M)$ かつ b は (p, Ω) の cut-off 関数

定義より $0 \leq b(x) \leq 1$ $({}^\forall x \in M)$ は明らか.

以下を示せば良い

(示) ① $\operatorname{supp} b$ はコンパクト かつ $\operatorname{supp} b \subset O \subset \Omega$

② $b \in C^\infty(M)$

③ $p \in {}^\exists V \underset{\text{open}}{\subset} M$ s.t. $b|_V \equiv 1$

① ㊟ $\mathrm{supp}\, b$ はコンパクトかつ $\mathrm{supp}\, b \subset O \subset \Omega$

まず b の定義より

$\{x \in M \mid b(x) \neq 0\}$ ← これの閉包が $\mathrm{supp}\, b$

$= u^{-1}(\{u \in U \mid b_0(u) \neq 0\})$

$(\because \mathrm{supp}\, b_0 \subset U) \to$ $= u^{-1}(\underbrace{\{u \in \mathbb{R}^n \mid b_0(u) \neq 0\}}) \subset O$

に注意する。

これの閉包が $\mathrm{supp}\, b_0$

いま $\mathrm{supp}\, b_0$ はコンパクト $(\because b_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n))$ かつ $\mathrm{supp}\, b_0 \subset U$ であるから

$u^{-1}(\mathrm{supp}\, b_0) \subset O$ もコンパクト.

$u^{-1}: U \to O$ は同相

M がハウスドルフであることに注意すると

$$u^{-1}(\mathrm{supp}\, b_0) \subset O \subset \Omega \quad \text{は コンパクト 閉集合 in } M$$

であり，特に $\{x \in M \mid b(x) \neq 0\} \subset u^{-1}(\mathrm{supp}\, b_0)$ より ← エっエの注意から

$$\underbrace{\mathrm{supp}}_{\text{閉包}}\, b \subset u^{-1}(\mathrm{supp}\, b_0) \subset O \subset \Omega \quad \text{も コンパクト}$$

（① 証明終）

② 示 $b \in C^\infty(M)$

いま $\mathrm{supp}\, b \subset O$ より $\{O, M \setminus \mathrm{supp}\, b\}$ は M の open cover.
(∵ ①)

従って以下を示せばよい

示 $b|_O \in C^\infty(O)$ かつ $b|_{M \setminus \mathrm{supp}\, b} \in C^\infty(M \setminus \mathrm{supp}\, b)$

b の定義より

$$b|_O = b_0 \circ u = u^*(b_0) \in C^\infty(O)$$

U 上 C^∞

$u : O \to U$ による引き戻し

また $b|_{M \setminus \mathrm{supp}\, b} = 0 \in C^\infty(M \setminus \mathrm{supp}\, b)$

supp b の定義

(② 証明終)

③ 示 $p \in {}^{\exists} V \underset{\text{open}}{\subset} M$ s.t. $b|_V \equiv 1$

b_0 は $(0, \mathcal{U}_1(0; \mathbb{R}^n))$ の cut-off 関数であって

$0 \in V_0 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ であって $b_0|_{V_0} \equiv 1$ となるものがとれる.

$V_0 \subset \operatorname{supp} b_0 \subset \mathcal{U}_1(0; \mathbb{R}^n) \subset U$ より $V_0 \underset{\text{open}}{\subset} U$.

$V := \varphi^{-1}(V_0) \underset{\text{open}}{\subset} O \underset{\text{open}}{\subset} M$ とおくと

$p \in V \underset{\text{open}}{\subset} M$ かつ $b|_V \equiv 1$ (③ 証明終)

∎

Section 5.2 : C^∞級関数の延長

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: m-mfd

$\emptyset \neq \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

記号 :

$$\mathcal{A}_\Omega := \{ (O \cap \Omega,\ u(O \cap \Omega),\ u|_{O \cap \Omega}) \in \mathcal{LC}(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid (O, U, u) \in \mathcal{A} \}$$

$\rightsquigarrow (\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ は m-mfd

開部分多様体

問：$C^\infty(\Omega)$ の元は $C^\infty(M)$ の元とみなせるか？

Def 5.2.1：$\mathrm{rest}^M_U : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega),\ f \mapsto f|_\Omega$

Prop 5.2.2：$\mathrm{rest}^M_U : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega)$

は $\mathbb{R}$代数準同型として well-defined.

Remark：$\mathrm{rest}^M_U : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega)$

は全射とも単射とも限らない．

まずい（例 $M = S^1,\ \Omega = S^1 \setminus \{*\}$）

答："局所的には" できる！

Theorem 5.2.3 : $^{\forall} p \in \Omega$, $p \in {}^{\exists} V \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$ s.t.

$$\mathrm{rest}^{M}_{V}\, C^{\infty}(M) \supset \mathrm{rest}^{\Omega}_{V}\, C^{\infty}(\Omega) \quad \text{in } C^{\infty}(V)$$

$$\left(\text{i.e. } {}^{\forall} h \in C^{\infty}(\Omega),\ {}^{\exists} \tilde{h} \in C^{\infty}(M) \text{ s.t. } \tilde{h}|_V = h|_V \right)$$

点 p のまわりでの様子を変えずに

Ω 上の C^{∞} 級関数を M 上の C^{∞} 級関数に延長できる!

(講義では省略)

Proof of Thm 5.2.3 : (cut-off 関数の応用) $^\forall p \in \Omega$ をとる.

Thm 5.1.5 より (p, Ω) の cut-off 関数 $b \in C_c^\infty(M)$ がとれる.

cut-off 関数の定義 (Def 5.1.4) より

$$\mathrm{supp}\, b \subset \Omega \quad \text{であり},$$

$$p \in V \underset{\text{open}}{\subset} M \quad \text{であって} \quad b|_V \equiv 1 \quad \text{となるものがとれる}.$$

(示) $^\forall h \in C^\infty(\Omega)$, $^\exists \hat{h} \in C^\infty(M)$ s.t. $h|_V = \hat{h}|_V$

${}^\forall h \in C^\infty(\Omega)$ をとる.

$\tilde{h} : M \to \mathbb{R}$ を

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) \cdot b(x) & (x \in \Omega) \\ 0 & (x \notin \Omega) \end{cases}$$

として定める.

(示) $\tilde{h} \in C^\infty(M)$ s.t. $h|_V = \tilde{h}|_V$

$b(x) = 1$ for $x \in V$ より $\tilde{h}|_V = h|_V$ は明らか.

$\tilde{h} \in C^\infty(M)$ を示す.

$\{\Omega, M \setminus \operatorname{supp} b\}$ は M の open cover なので

($\operatorname{supp} b \subset \Omega$ より)

以下を示せば十分

(示) $\tilde{h}|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ かつ $\tilde{h}|_{M \setminus \operatorname{supp} b} \in C^\infty(M \setminus \operatorname{supp} b)$

まず $h \in C^\infty(\Omega)$, $b|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ より

$$\tilde{h}|_\Omega = h \cdot b|_\Omega \in C^\infty(\Omega).$$

また定義より明らかに

$$h|_{M \setminus \operatorname{supp} b} = 0 \in C^\infty(M \setminus \operatorname{supp} b)$$

$\blacksquare$